Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

© Н. М. Мусин

17.03.2019

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t.

Изучение одного из двух уравнений на двух соседних «высотах» $t_0' > t_0 > 0$, на которых есть хотя бы одно решение, и при этом $\sigma_0 < 1/2$, показало, что если ε - бесконечно малая положительная величина (здесь были применены методы нестандартного (инфинитезимального) анализа), то на «высоте» $t_0 + \varepsilon$ обязательно будут нули, а это противоречит выбору исходных «высот».

Следовательно, случай $\sigma_0 < 1/2$ невозможен, отсюда следует, что $\sigma_0 = 1/2$.

Ключевые слова:
гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули, инфинитезимальный анализ, нестандартный анализ.

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
Далее, пусть $x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная.

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \tag{1}$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. Перепишем равенство 1 в виде

$$\zeta(s) = s \left(\frac{1}{s-1} - \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right)$$

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} \tag{2}$$

Имеют место равенства

$$\frac{1}{x^{s+1}} = \frac{1}{x^{\sigma+1}} \left(\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)\right),$$
$$\frac{1}{s-1} = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Поэтому уравнение 2 будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2}, \\ \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1$, $t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = 1/2$.

О левых и правых частях уравнений системы 3

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma, t) = \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx,$$
$$v_1(\sigma, t) = \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx,$$
$$u_2(\sigma, t) = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},$$
$$v_2(\sigma, t) = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Таким образом, систему 3 можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t). \end{cases} \tag{4}$$

Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то (σ_0, t_0) является решением системы 4 и, в частности, уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение левой и правой частей именно этого уравнения. Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

Лемма 1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной $\sigma \in (0; 1)$.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma - 1)t_0}{(t_0^2 + (\sigma - 1)^2)^2} > 0$$

□

Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $(t_0/(1 + t_0^2), 1/t_0)$.

Другими словами, график функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ целиком лежит в прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\ t_0/(1+t_0^2) < w < 1/t_0$. Далее нас интересует часть графика функции $w = v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 1. *Прямоугольник $0 < \sigma < 1,\ t_0/(1 + t_0^2) < w < 1/t_0$ будем называть критическим прямоугольником.*

Определение 2. *Значение переменной σ, при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $w = v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.*

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ, т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике; в то же время это точка пересечения графиков функций $w = v_1(\sigma, t_0)$ и $w = v_2(\sigma, t_0)$.

Доказательство гипотезы Римана

Теорема. *Если дзета-функция Римана при фиксированном $t = t_0 > 0$ имеет решение $s_0 = \sigma_0 + it_0$, то $\sigma_0 = 1/2$.*

Доказательство. Нетривиальный нуль дзета-функции удовлетворяет системе 4 и, в частности, второму уравнению этой системы.

Если $\sigma_0 \neq 1/2$, то из свойства симметричности решений относительно прямой $\sigma = 1/2$ следует, что имеется и второе решение $1 - \sigma_0 + it_0$, и пара $(1 - \sigma_0, t_0)$ тоже должна удовлетворять второму уравнению системы.

Итак, подставим пару $(1 - \sigma_0, t_0)$ во второе уравнение:

$$v_1(1 - \sigma_0, t_0) = v_2(1 - \sigma_0, t_0).$$

Так как

$$v_2(1-\sigma_0, t_0) = \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2},$$

то точка $(1-\sigma_0, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике и, следовательно, график левой части, то есть функции $w = v_1(\sigma, t_0)$, должен пересекаться с графиком правой части, то есть функции $w = v_2(\sigma, t_0)$, в этой точке.

Итак, пусть на «высоте» t_0 у нас два корня: $\sigma_0 < \frac{1}{2}$ и $1-\sigma_0 > \frac{1}{2}$.

Пусть теперь $t_0' > 0$ - ближайшая «высота», на которой имеется хотя бы один нуль. Для определённости пусть $t_0' > t_0$.

Воспользуемся методами нестандартного (инфинитезимального) анализа (см., например, [2]).

Возьмём бесконечно малую положительную величину ε, то есть $\varepsilon \approx 0$ и $\varepsilon > 0$.

Изучим приращения выражений v_1 и v_2 как функций от σ при переходе с «высоты» t_0 на «высоту» $t_0 + \varepsilon$ при произвольном $\sigma \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned}
&\big|v_1(\sigma, t_0+\varepsilon) - v_1(\sigma, t_0)\big| = \\
&= \left| \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin((t_0+\varepsilon)\ln x)dx - \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t\ln x)dx \right| = \\
&= \left| \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} (\sin((t_0+\varepsilon)\ln x) - \sin(t_0 \ln x))dx \right| \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} 2 \left|\sin\left(\frac{\varepsilon \ln x}{2}\right)\right| \left|\cos\left(\left(t_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\ln x\right)\right| dx \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} 2 \frac{\varepsilon \ln x}{2} dx = \varepsilon \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}\ln x}{x^{\sigma+1}} dx \leqslant \varepsilon \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^{\sigma+1}} dx = \varepsilon \frac{1}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$v_1(\sigma, t_0+\varepsilon) - v_1(\sigma, t_0) \approx 0. \tag{5}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&\big|v_2(\sigma, t_0+\varepsilon) - v_2(\sigma, t_0)\big| = \\
&= \left| \frac{t_0+\varepsilon}{(\sigma-1)^2 + (t_0+\varepsilon)^2} - \frac{t_0}{(\sigma-1)^2 + t_0^2} \right| = \varepsilon \left| \frac{(\sigma-1)^2 - t(t+\varepsilon)}{((\sigma-1)^2 + (t_0+\varepsilon)^2)((\sigma-1)^2 + t_0^2)} \right|
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$v_2(\sigma, t_0+\varepsilon) - v_2(\sigma, t_0) \approx 0. \tag{6}$$

Из равенств 5 и 6 следует, что графики функций $v_1(\sigma, t_0+\varepsilon)$ и $v_1(\sigma, t_0)$, $v_2(\sigma, t_0+\varepsilon)$ и $v_2(\sigma, t_0)$ соответственно, бесконечно близки.

Поэтому графики функций $v_1(\sigma, t_0+\varepsilon)$ и $v_2(\sigma, t_0+\varepsilon)$ должны пересекаться.

Пусть $\sigma_0^{'}$ и $1-\sigma_0^{'}$ - абсциссы точек пересечения этих графиков, значит, в частности,

$$v_1(\sigma_0^{'}, t_0+\varepsilon) = v_2(\sigma_0^{'}, t_0+\varepsilon),$$

при этом $\sigma_0 \approx \sigma_0^{'} < \frac{1}{2}$ и $1-\sigma_0 \approx 1-\sigma_0^{'} > \frac{1}{2}$.

Имеет место равенство стандартных частей:

$$st(v_1(\sigma_0^{'}, t_0+\varepsilon)) = st(v_2(\sigma_0^{'}, t_0+\varepsilon)).$$

В силу непрерывности функций v_1 и v_2 имеем равенство

$$v_1(st(\sigma_0^{'}), t_0+\varepsilon) = v_2(st(\sigma_0^{'}), t_0+\varepsilon),$$

отсюда следует

$$v_1(\sigma_0, t_0+\varepsilon) = v_2(\sigma_0, t_0+\varepsilon),$$

то есть на «высоте» $t_0+\varepsilon$ у нас два нуля: σ_0 и $1-\sigma_0$.

Но между «высотами» t_0 и t_0' нет нулей и, следовательно, по принципу переноса, на «высоте» $t_0+\varepsilon$ не может быть вообще никаких нулей.

Следовательно, случай $\sigma_0 < 1/2$ невозможен, отсюда следует, что $\sigma_0 = 1/2$.

Рассмотрим случай $\sigma_0 = 1/2$, тогда графики на «высоте» t_0 имеют единственную точку пересечения, значит, при бесконечно малом сдвиге до «высоты» $t_0+\varepsilon$ графики перестают пересекаются (отрываются друг от друга).

□

Гипотеза Римана доказана.

Список литературы

[1] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. *Введение в теорию чисел.* Изд-во Московского университета,1984)

[2] R. Goldblatt, *Lectures on the hyperreals: an introduction to nonstandard analysis, New York : Springer, 1998.*