Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

Proof of the Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function*

© Н. М. Мусин

23 апреля 2024

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то пара (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t.

Изучение одного из этих двух уравнений показало, что из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $\sigma = \dfrac{1}{2}$ следует, что $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

Ключевые слова: гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

Abstract

The Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function is proved.

If a complex number $s_0 = \sigma_0 + it_0$ is a nontrivial zero, then the pair (σ_0, t_0) is a solution to a system of two equations of two real variables σ and t.

Considering one of that two equations one can found that as nontrivial zeros are symmetric about the line $\sigma = \dfrac{1}{2}$ it follows that $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

Keywords: the Riemann hypothesis, zeta function, nontrivial zeros.

*Работа выполнена без какой-либо финансовой поддержки.

1 Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
Далее, $x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная.

Известно [1, с. 40], что при $\sigma > 0$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx. \tag{1}$$

Вывод формулы (1) имеется также в [2].

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1}. \tag{2}$$

Замечание 1. *При работе с формулой (1) в [1, с. 34] авторы определили функцию x^s для $x > 0$ равенством $x^s = e^{s \ln x}$. Тогда $x^s = x^\sigma x^{it} = x^\sigma e^{it \ln x}$.*

Имеют место равенства

$$\frac{1}{x^{s+1}} = \frac{1}{x^{\sigma+1}} \left(\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)\right),$$
$$\frac{1}{s-1} = \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}.$$

Поэтому уравнение (2) будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси σ, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1$, $t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

2 О левых и правых частях уравнений системы (3)

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma,t)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\cos(t\ln x)dx,$$

$$v_1(\sigma,t)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx,$$

$$u_2(\sigma,t)=\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},$$

$$v_2(\sigma,t)=\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Таким образом, систему (3) можно записать в виде

$$\begin{cases}u_1(\sigma,t)=u_2(\sigma,t),\\ v_1(\sigma,t)=v_2(\sigma,t).\end{cases}\tag{4}$$

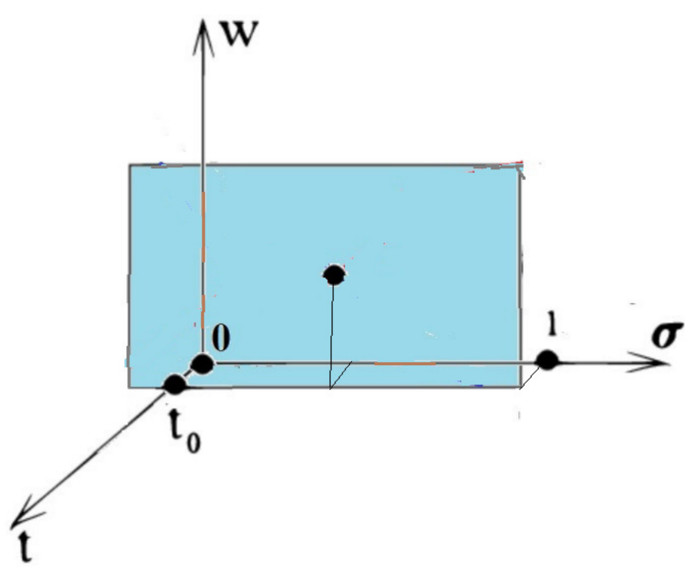

Рис. 1: Плоскость $t=t_0$

Если $s_0=\sigma_0+it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то пара (σ_0,t_0) является решением системы (4) и, в частности, уравнения $v_1(\sigma,t)=v_2(\sigma,t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t=t_0>0$. Далее изучаем поведение обеих частей именно этого уравнения как функции переменной σ; будет показано, что из предположения $\sigma_0\neq\dfrac{1}{2}$ получается противоречие, поэтому изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет (выбор уравнения решался путём подбрасывания монеты; при желании доказательство можно проводить, изучая только уравнение $u_1(\sigma,t)=u_2(\sigma,t)$, схема та же самая).

Лемма 1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной σ.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma-1)t_0}{((\sigma-1)^2+t_0^2)^2} > 0.$$

□

Следствие. *Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0;1)$ принадлежат интервалу $U = \left(\frac{t_0}{1+t_0^2}, \frac{1}{t_0}\right)$.*

Определение 1. *Прямоугольник $\left\{(\sigma, w) \;\middle|\; \sigma \in (0;1), w \in U\right\}$ будем называть критическим прямоугольником.*

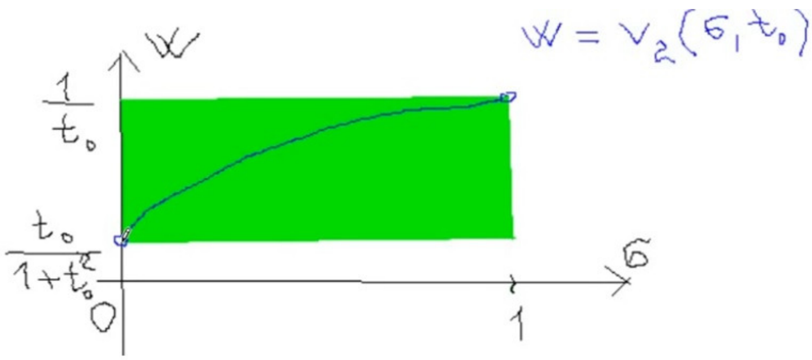

Рис. 2: Критический прямоугольник

Замечание 2. *Критические прямоугольники очень тонкие, их ширина равна $\frac{1}{t_0} - \frac{t_0}{1+t_0^2} = \frac{1}{(1+t_0^2)t_0}$. Уже для нетривиального нуля с самой маленькой положительной мнимой частью $t_0 = 14.134725141...$ получается ширина 0.0003523461812...*

Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 2. *Значение переменной σ, при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.*

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ, т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике как точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Если σ - критическое значение, то, согласно определению, $v_1(\sigma, t_0) \in \left(\frac{t_0}{1+t_0^2}, \frac{1}{t_0}\right)$; в частности, $v_1(\sigma, t_0) > 0$.

Замечание 3. *Дзета-функция является аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением точки* $s = 1$, *следовательно, она аналитична и на отрезках* $\left\{\sigma + it \;\middle|\; \sigma \in [0;1]\right\}$ *при произвольных* $t \in \mathbb{R}\backslash 0$, *поэтому на этих отрезках, благодаря их замкнутости и ограниченности, она может иметь лишь конечное множество нулей. Отсюда следует, что множество решений уравнения* $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$ *также конечно на интервале* $(0;1)$.

Лемма 2.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим $F(x)$ первообразную функции $\dfrac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x)$.

$$F(x) = \int \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \int \sin(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} d \ln x = |u = \ln x| = \int \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} du =$$
$$= -\frac{1}{\sigma} \int \sin(t_0 u) d e^{-\sigma u} = -\frac{1}{\sigma} \left(\sin(t_0 u) e^{-\sigma u} - \int e^{-\sigma u} d \sin(t_0 u) \right) = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} +$$
$$+ \frac{t_0}{\sigma} \int e^{-\sigma u} \cos(t_0 u) du = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} + \frac{t_0}{\sigma} \int -\frac{1}{\sigma} \cos(t_0 u) d e^{-\sigma u} = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} -$$
$$- \frac{t_0}{\sigma^2} \left(\cos(t_0 u) e^{-\sigma u} - \int e^{-\sigma u} d \cos(t_0 u) \right) = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} - \frac{t_0}{\sigma^2} \cos(t_0 u) e^{-\sigma u} -$$
$$- \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} du = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} - \frac{t_0}{\sigma^2} \cos(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} -$$
$$- \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \sin(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} d \ln x = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx =$$
$$- \frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x).$$

Получили равенство $F(x) = -\dfrac{1}{\sigma} \dfrac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \dfrac{t_0}{\sigma^2} \dfrac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \dfrac{t_0^2}{\sigma^2} F(x)$, следовательно,
$F(x) + \dfrac{t_0^2}{\sigma^2} F(x) = -\dfrac{1}{\sigma} \dfrac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \dfrac{t_0}{\sigma^2} \dfrac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma}$.
Итак, $\dfrac{t_0^2 + \sigma^2}{\sigma^2} F(x) = -\dfrac{1}{\sigma} \dfrac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \dfrac{t_0}{\sigma^2} \dfrac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma}$.
Далее,

$$\frac{t_0^2 + \sigma^2}{\sigma^2} F(x) \bigg|_1^{+\infty} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} \bigg|_1^{+\infty} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} \bigg|_1^{+\infty} = \frac{t_0}{\sigma^2},$$

отсюда следует, что

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = F(x)|_1^{+\infty} = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

$\square$

Замечание 4. *Если бы мы вместо равенства $v_1(\sigma,t)=v_2(\sigma,t)$ системы (4) выбрали равенство $u_1(\sigma,t)=u_2(\sigma,t)$, то нам пришлось бы доказывать равенство*

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\sigma+1}}\cos(t_0\ln x)dx=\frac{\sigma}{\sigma^2+t_0^2}.$$

Построим функцию

$$\hat{v}_1(\sigma,t)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx.$$

Лемма 2 означает, что

$$\hat{v}_1(\sigma,t_0)=\frac{t_0}{\sigma^2+t_0^2}.$$

Графики функций $\hat{v}_1(\sigma,t_0)$ и $v_2(\sigma,t_0)$ расположены целиком в критическом прямоугольнике и симметричны в нём друг другу относительно прямой $\sigma=\frac{1}{2}$, пересекаясь в точке с абсциссой $\frac{1}{2}$.

В самом деле, функция $\hat{v}_1(\sigma,t_0)$ убывает на $[0;1]$ от $\frac{1}{t_0}$ до $\frac{1}{1+t_0^2}$, функция $v_2(\sigma,t_0)$ возрастает на $[0;1]$ от $\frac{1}{1+t_0^2}$ до $\frac{1}{t_0}$, при этом

$$\hat{v}_1(\sigma,t_0)=\frac{t_0}{\sigma^2+t_0^2}=\frac{t_0}{(1-(1-\sigma))^2+t_0^2}=v_2(1-\sigma,t_0).$$

Равенство $\hat{v}_1(\sigma,t_0)=v_2(\sigma,t_0)$ означает то же самое, что и $\frac{t_0}{\sigma^2+t_0^2}=\frac{t_0}{(1-\sigma)^2+t_0^2}$, откуда следует, что графики $\hat{v}_1$ и v_2 пересекаются в точке с абсцисой $\sigma=\frac{1}{2}$.

3 Доказательство гипотезы Римана

Теорема. *Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль $s_0=\sigma_0+it_0$, где $t_0>0$, то $\sigma_0=\frac{1}{2}$.*

Доказательство. Согласно замечанию 3, уравнение $v_1(\sigma,t_0)=v_2(\sigma,t_0)$ может иметь лишь конечное множество решений. Предположим, что среди этих решений нет $\frac{1}{2}$, тогда среди решений, которые меньше $\frac{1}{2}$, возьмём наибольшее. Обозначим его σ_0.

Как известно, в комплексной плоскости (σ,t), если точка $s_0=\sigma_0+it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то точка $1-\sigma_0+it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $\sigma=\frac{1}{2}$, тоже является нетривиальным нулём дзета-функции, то есть, если пара (σ_0, t_0) является решением уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$, то пара $(1-\sigma_0, t_0)$ тоже будет решением этого же уравнения.

Отсюда следует, что на интервале $(\sigma_0, 1-\sigma_0)$ нет решений уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$.

Точка $A(\sigma_0, v_2(\sigma_0, t_0))$ имеет ординату $\dfrac{t_0}{(1-\sigma_0)^2 + t_0^2}$,
а точка $B(1-\sigma_0, v_2(1-\sigma_0, t_0))$ имеет ординату $= \dfrac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2}$.

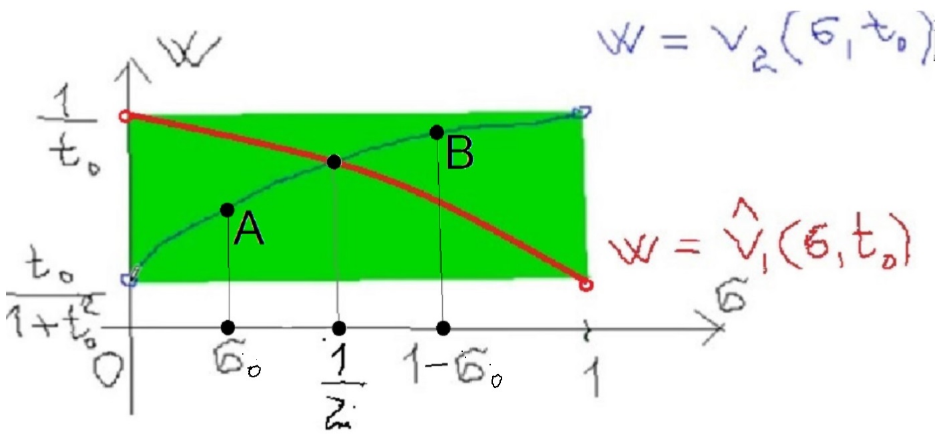

Рис. 3: Пересечение графиков $\hat{v}_1$ и v_2

Так как по построению $\sigma_0 < \dfrac{1}{2}$, то точка A лежит ниже графика функции $\hat{v}_1(\sigma_0, t_0)$, а точка B - выше.

Функция v_1 непрерывна, значит, её график, проходя из точки A в точку B, пересекает график функции $\hat{v}_1$ в некоторой точке, абсциссу которой обозначим σ_1.

Это значит, что $v_1(\sigma_1, t_0) = \hat{v}_1(\sigma_1, t_0) = \dfrac{t_0}{\sigma_1^2 + t_0^2}$. Так как графики $\hat{v}_1$ и v_2 симметричны относительно прямой $\sigma = \dfrac{1}{2}$, получаем равенство $\dfrac{t_0}{\sigma_1^2 + t_0^2} = \dfrac{t_0}{(1-\sigma_1)^2 + t_0^2}$, следовательно, $v_1(\sigma_1, t_0) = v_2(\sigma_1, t_0)$. Но ведь полученное равенство означает, что графики v_1 и v_2 пересекаются в точке с абсциссой $\sigma_1 = \dfrac{1}{2}$ и эта точка является решением уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$.

Но, согласно построениям, решений строго между точками σ_0 и $1-\sigma_0$ не может быть.

Гипотеза Римана доказана. $\square$

4 О функции $\mathbf{v_1}$

Функция $v_1(\sigma,t) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t\ln x)dx$ оказалась полезной при доказательстве гипотезы Римана.

Обозначим $\Re[a,b]$ множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$.

Нам понадобится следствие из следующей теоремы [3, с. 347]:

Теорема (первая теорема о среднем для интеграла)**.** *Пусть* $f, g \in \Re[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. *Если функция* g *неотрицательна (или неположительна) на отрезке* $[a,b]$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx, \text{ где } \mu \in [m,M].$$

Следствие. *Пусть условия теоремы о среднем выполняются для любого* $b \in [a,+\infty)$ *и существует такое действительное* B, *что* $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$ *при всех* $b > B$, *пусть существуют несобственные интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, *тогда*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \alpha \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx, \text{ где } \alpha \in [m,M].$$

Доказательство. Согласно теореме о среднем

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} = \mu(b) \text{ при } b > B, \text{где } \mu(b) \in [m,M].$$

Так как несобственные интегралы существуют, то при $b \to +\infty$ существует предел левой части, а значит, существует и $\alpha = \lim\limits_{b\to+\infty} \mu(b)$. Так как $\mu(b) \in [m,M]$, то и $\alpha \in [m,M]$. □

Согласно следствию из первой теоремы о среднем для интеграла, для каждого

$\sigma > 0$ и, тем более, для каждого $\sigma \in (0;1)$ найдутся такие $\alpha(\sigma), \beta(\sigma) \in [0;1]$, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}(1+\sin(t_0 \ln x))dx = \alpha(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1+\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \alpha(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \alpha(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx =$$
$$= \alpha(\sigma)\frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma)\frac{t_0}{\sigma^2+t_0^2}, \tag{6}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}(1+\sin(t_0 \ln x))dx = \beta(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \beta(\sigma)\frac{1}{\sigma} + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx. \tag{7}$$

Приравнивая правые части равенств 6 и 7, получаем

$$\alpha(\sigma)\frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma)\frac{t_0}{\sigma^2+t_0^2} = \beta(\sigma)\frac{1}{\sigma} + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx,$$

отсюда получаем

$$\int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma))\frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma)\frac{t_0}{\sigma^2+t_0^2}.$$

Таким образом,

$$v_1(\sigma, t_0) = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma))\frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma)\hat{v}_1(\sigma, t_0). \tag{8}$$

Замечание 5. *Пусть $\sigma-$критическое значение.*

*Пусть $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) > 0$. Так как
$v_1(\sigma, t_0) \in U$, то $\frac{1}{t_0} > v_1(\sigma, t_0) = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma))\frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma)\hat{v}_1(\sigma, t_0) > (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma))\frac{1}{\sigma} >$
$> \alpha(\sigma) - \beta(\sigma)$, следовательно, $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) < \frac{1}{t_0}$.*

*Если же $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) < 0$, то $v_1(\sigma, t_0) = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma))\frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma)\hat{v}_1(\sigma, t_0) > \frac{t_0}{1+t_0^2}$,
$\beta(\sigma) - \alpha(\sigma) < (\beta(\sigma) - \alpha(\sigma))\frac{1}{\sigma} < \alpha(\sigma)\hat{v}_1(\sigma, t_0) - \frac{t_0}{1+t_0^2} < \hat{v}_1(\sigma, t_0) < \frac{1}{t_0}$, следовательно,
$\beta(\sigma) - \alpha(\sigma) < \frac{1}{t_0}$.*

Таким образом, $|\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)| < \frac{1}{t_0}$.

Возьмём какую-либо точку $\sigma \in (0;1)$. Рассмотрим случаи, когда функция $\alpha - \beta$ принимает отрицательное или нулевое значения.

1. $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) < 0$.

Из равенства 8 следует, что $v_1(\sigma, t_0) < \alpha(\sigma)\hat{v}_1(\sigma, t_0) \leqslant \hat{v}_1(\sigma, t_0)$ при всех $\alpha \in (0;1)$.

2. $\alpha(\sigma)-\beta(\sigma)=0$.

Из равенства (8) следует, что $v_1(\sigma,t_0)=\alpha(\sigma)\hat{v}_1(\sigma,t_0)\leqslant\hat{v}_1(\sigma,t_0)$ при всех $\sigma\in(0;1)$. При $\alpha(\sigma)<1$ точка $v_1(\sigma,t_0)$ лежит ниже точки $\hat{v}_1(\sigma,t_0)$. При $\alpha(\sigma)=1$ должно выполняться и равенство $\beta(\sigma)=1$. Но ведь тогда из равенства $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}dx=\beta(\sigma)\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\sigma+1}}dx$ получается равенство $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\sigma+1}}dx$, которое не выполняется. Значит, равенство $\alpha(\sigma)=1$ не достигается, поэтому $\alpha(\sigma)<1$.

Таким образом, если v_1 отрицательна на каком-либо интервале, то соответствующая часть графика лежит ниже графика функции $\hat{v}_1$.

Предложение. *Функция $\alpha(\sigma)-\beta(\sigma)$ непрерывна на* $(0;1)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(\sigma)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}dx=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int\limits_n^{n+1}\frac{x-n}{x^{\sigma+1}}dx$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ имеем неравенство $\int\limits_n^{n+1}\frac{x-n}{x^{\sigma+1}}dx\leqslant\frac{1}{n^{\sigma+1}}$, поэтому функциональный ряд для функции $\varphi(\sigma)$ мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\sigma+1}}$ на отрезке $[\varepsilon,1]$ для произвольного $\varepsilon\in(0;1)$, следовательно, он по признаку Вейерштрасса на этом отрезке сходится равномерно, значит, функция $\varphi(\sigma)$ непрерывна на $[\varepsilon,1]$. В силу произвольности ε функция $\varphi(\sigma)$ непрерывна на $(0,1]$ и, значит, и на $(0,1)$.

Функция β является непрерывной функцией на $(0;1)$, так как, согласно определению, $\beta(\sigma)=\dfrac{\varphi(\sigma)}{\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\sigma+1}}dx}$, это отношение двух непрерывных функций, причём $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\sigma+1}}dx=\frac{1}{\sigma}>0$.

Запишем равенство (8) в виде $\varphi(\sigma)+v_1(\sigma,t_0)=\alpha(\sigma)\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{t_0}{\sigma^2+t_0^2}\right)$; выражая из него $\alpha(\sigma)$, устанавливаем её непрерывность, поскольку выражение в скобках непрерывно и не равно нигде нулю на $(0;1)$, а функция $v_1(\sigma,t_0)$ непрерывна как мнимая часть аналитической функции $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx=\frac{1}{s-1}-\frac{\zeta(s)}{s}$, в соответствии с (1). □

Если графики функций v_1 и $\hat{v}_1$ пересекаются, то

$$(\alpha(\sigma)-\beta(\sigma))\frac{1}{\sigma}+\alpha(\sigma)\hat{v}_1(\sigma,t_0)=\hat{v}_1(\sigma,t_0),$$

откуда следует, что $\alpha(\sigma)-\beta(\sigma)>0$ на всём интервале $(0;1)$.

Если гипотеза Римана верна, то графики функций v_1 и $\hat{v}_1$ пересекаются в единственной точке с абсциссой $\sigma_0 = 0.5$ и ординатой $\hat{v}_1(0.5) = \dfrac{t_0}{0.25 + t_0^2}$.

Таким образом, если $\dfrac{1}{2} + it_0 -$ нуль дзета-функции Римана, то выполняется равенство

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{0.25 + t_0^2}.$$

В соответствии с системой 3 выполняется равенство

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \cos(t_0 \ln x) dx = -\frac{0.5}{0.25 + t_0^2},$$

а также и равенство

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \cos(t_0 \ln x) dx = -\frac{1}{2t_0} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \sin(t_0 \ln x) dx.$$

В общем случае функция v_1 ведёт себя совершенно непредсказуемо, так как вычислить параметры $\alpha(\sigma)$ и $\beta(\sigma)$, от которых зависит её поведение, так, чтобы график функции v_1 прошёл через точку с абсциссой $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$ нетривиального нуля, не представляется возможным.

Но, тем не менее, об этих параметрах можно кое-что сказать. Например, следующее: их можно, ради интереса, приближённо вычислить, уже зная положительную мнимую часть t_0 нетривиального нуля, например, $t_0 = 14.134725141... -$ наименьшая положительная мнимая часть известного нетривиального нуля.

Обозначим $\alpha(\sigma_0)$ и $\beta(\sigma_0)$ символами α_0 и β_0 соответственно.

Далее под σ_0 всегда будет подразумеваться $\dfrac{1}{2}$.

Как указано в замечании 4, для нетривиальных нулей с большими положительными мнимыми частями эти коэффициенты очень мало отличаются друг от друга.

При $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$ выполняется равенство $(\alpha_0 - \beta_0)\dfrac{1}{\sigma_0} + \alpha_0 \hat{v}_1(\sigma_0, t_0) = v_2(\sigma_0, t_0)$, из которого получаем $1.035329666...\alpha_0 - \beta_0 = 0.03532966658...$

Найдём теперь β_0 в соответствии с равенством $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}} dx = \beta_0 \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0+1}} dx$.

Сначала вычислим интеграл в левой части равенства.

$$\int\limits_k^{k+1} \frac{x-k}{x^{\sigma+1}} dx = |x = k+t| = \int\limits_0^1 \frac{t}{(k+t)^{\sigma+1}} dt = \int\limits_0^1 \frac{k+t}{(k+t)^{\sigma+1}} dt - \int\limits_0^1 \frac{k}{(k+t)^{\sigma+1}} dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{1}{(k+t)^{\sigma}} dt - k\int\limits_0^1 \frac{1}{(k+t)^{\sigma+1}} dt = \left(\frac{1}{1-\sigma} \cdot (k+t)^{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \frac{1}{(k+t)^{\sigma}} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{1-\sigma}\cdot(k+1)^{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma}\cdot\frac{1}{(k+1)^{\sigma}}\right) - \left(\frac{1}{1-\sigma}\cdot k^{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma}\cdot\frac{1}{k^{\sigma}}\right) =$$
$$= \frac{(k+1)^{1-\sigma} - k^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma}\cdot\left(\frac{1}{(k+1)^{\sigma}} - \frac{1}{k^{\sigma}}\right).$$

Наконец, получаем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_k^{k+1} \frac{x-k}{x^{\sigma+1}}dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{(k+1)^{1-\sigma} - k^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma}\cdot\left(\frac{1}{(k+1)^{\sigma}} - \frac{1}{k^{\sigma}}\right)\right).$$

При $\sigma = \sigma_0 = \dfrac{1}{2}$ получаем $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0+1}}dx = 2, \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}}dx = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1-2\sqrt{k}\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}}$.

При $k = 1000000$ получаем $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}}dx = 0.9170582237...$

Из равенства $0.9170582237 = \beta_0 \cdot 2$ получаем $\beta_0 = 0.4585291118...$

Теперь можем найти $\alpha_0 = \dfrac{\beta_0 + 0.03532966658}{1.035329666} = 0.4770063050$.

Попробуем теперь хотя бы приблизительно представить, как ведут себя левый и правый части уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$. Конечно, для этого надо бы знать значения коэффициентов $\alpha(\sigma)$ и $\beta(\sigma)$ при всех остальных значениях σ, и выражения для их вычисления приведены в этой части статьи, но они очень громоздки.

Если предположить, что $\alpha(\sigma) \approx \alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)$ и $\beta(\sigma) \approx \beta\left(\dfrac{1}{2}\right)$, то равенство (8) принимало бы приблизительно вид $v_1(\sigma, t_0) = \dfrac{0.0184771932}{\sigma} + \dfrac{6.742353011}{\sigma^2 + 199.7904548}$.

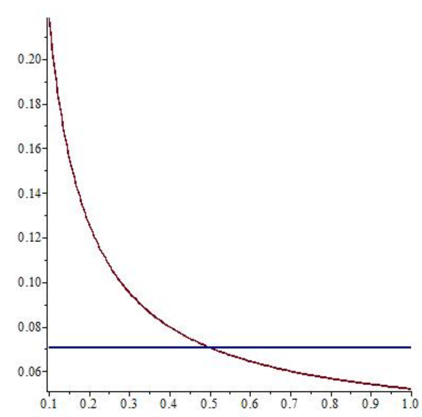

Рис. 4: Пересечение графиков v_1 и v_2

И это всё, что пока установлено.

Список литературы

[1] А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, Введение в теорию чисел, Изд-во Московского университета, М., 1984. [A. I. Galochkin, Ju. V. Nesterenko, A. B. Shidlovskij, Vvedenie v teoriju chisel, Izd-vo Moskovskogo universiteta, Moscow., 1984 (In Russian)].

[2] Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. М.:Изд-во иностранной литературы, 1953.

[3] В . А. Зорич, Математический анализ. Часть I., 2-е изд., испр. и доп., Фазис, М., 1997; англ. пер. :V. A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2 ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2015.