# Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

© Н. М. Мусин

29.07.2018

УДК 511

**Аннотация**

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то $(\sigma_0, t_0)$ является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных $\sigma$ и $t$.

Изучение одного из двух уравнений показало, что его левая часть не возрастает, правая часть возрастает при фиксированном $t = t_0 > 0$ как функции переменной $\sigma$ на множестве так называемых критических значений, значит, на «высоте» $t = t_0$ это решение единственно. Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $Re\, s = 1/2$ следует, что $\sigma_0 = 1/2$.

**Ключевые слова:** гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

## Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
$x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная.

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \tag{1}$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x$. Перепишем равенство 1 в виде

$$\zeta(s) = s \left( \frac{1}{s-1} - \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right)$$

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx = \frac{1}{s-1} \tag{2}$$

Имеют место равенства

$$\frac{1}{x^{s+1}} = \frac{1}{x^{\sigma+1}}\left(\cos(t\ln x) - i\sin(t\ln x)\right),$$
$$\frac{1}{s-1} = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} - i\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Поэтому уравнение 2 будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\cos(t\ln x)dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2}, \\ \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1$, $t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = 1/2$.

# О левых и правых частях уравнений системы 3

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma,t) = \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\cos(t\ln x)dx,$$
$$v_1(\sigma,t) = \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx,$$
$$u_2(\sigma,t) = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},$$
$$v_2(\sigma,t) = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Таким образом, систему 3 можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma,t) = u_2(\sigma,t), \\ v_1(\sigma,t) = v_2(\sigma,t). \end{cases} \tag{4}$$

Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то $(\sigma_0, t_0)$ является решением системы 4 и, в частности, уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение левой и правой частей именно этого уравнения. Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

**Лемма 1.** *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной $\sigma$.*

*Доказательство.* Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma-1)t_0}{(t_0^2 + (\sigma-1)^2)^2} > 0$$

□

Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $(t_0/(1+t_0^2), 1/t_0)$.

Другими словами, график функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ целиком лежит в прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\ t_0/(1+t_0^2) < w < 1/t_0$. Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

**Определение 1.** *Прямоугольник $0 < \sigma < 1,\ t_0/(1+t_0^2) < w < 1/t_0$ будем называть критическим прямоугольником.*

**Определение 2.** *Значение переменной $\sigma$, при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.*

Таким образом, значение $\sigma_0$ является критическим значением переменной $\sigma$, т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике; в то же время это точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Функция $\sin(t_0 \ln x)$ обращается в нуль в точках $x_k = e^{\pi k/t_0}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Более того, так как изначально $x \geqslant 1$, то из неравенства $t_0 \ln x \geqslant 0$ и равенства $t_0 \ln x = \pi k$ следует, что $k \geqslant 0$.

Ясно, что $x_0 = 1$.

Число $k$ будем называть номером интервала $(x_k, x_{k+1})$. На каждом из таких интервалов функция $\sin(t_0 \ln x)$ имеет один и тот же постоянный знак. Очевидно, на интервале с номером $k = 0$ этот знак положительный, далее при переходе с одного интервала на соседний знаки чередуются.

Интервалы с чётными номерами будем называть *положительными*, а интервалы с нечётными номерами назовём *отрицательными.*

В дальнейшем фиксируем произвольное значение $\sigma \in (0, 1)$.

Обозначим

$$\Psi(\sigma, x) = \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x).$$

Функция $\Psi(\sigma, x)$ на интервале с любым номером обращается в нуль на конечном множестве попадающих в интервал натуральных чисел (из-за множителя $\{x\}$), в остальных точках имеет тот же знак, что и $\sin(t_0 \ln x)$.

Введём функцию

$$\varphi(\sigma, x) = \int\limits_1^x \Psi(\sigma, x) dx.$$

Эта функция непрерывна.

Ясно, что имеет место равенство

$$v_1(\sigma, t_0) = \lim_{x \to +\infty} \varphi(\sigma, x).$$

На замкнутом луче $[1, +\infty)$ оси $x$ функция $\varphi(\sigma, x)$ имеет только конечное множество нулей.

В самом деле, пусть функция $\varphi(\sigma, x)$ имеет бесконечно много нулей $c_1 = 1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$

Ясно, что $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = +\infty$, так как функция $\varphi(\sigma, x)$ аналитическая и на любой ограниченной области может иметь только конечное множество нулей.

Тогда

$$v_1(\sigma, t_0) = \lim_{k \to +\infty} \varphi(\sigma, c_k) = 0.$$

Но это противоречит тому, что $v_1(\sigma, t_0) > 0$, так как по условию $\sigma$ является критическим значением.

Пусть $c$ - наибольший нуль функции $\varphi(\sigma, x)$. Значит, непрерывная функция $\varphi(\sigma, x)$ имеет на открытом луче $(c, +\infty)$ постоянный знак. Так как $v_1(\sigma, t_0) > 0$, то $\varphi(\sigma, x) > 0$ в некоторой окрестности бесконечности и, следовательно, и на $(c, +\infty)$.

Очевидно, что $c$ попадает на некоторый положительный интервал, то есть $c \in (x_{2m}, x_{2m+1})$ для некоторого натурального $m$.

**Лемма 2.** *Функция $v_1(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ не возрастает на множестве критических значений переменной $\sigma$.*

*Доказательство.*

$$\frac{\partial v_1(\sigma, t_0)}{\partial \sigma} = -\int\limits_1^\infty \Psi(\sigma, x) \ln(x) dx = -\lim_{x \to +\infty} \int\limits_1^x \Psi(\sigma, x) \ln(x) dx.$$

Введём функцию

$$\varphi^*(\sigma, x) = \int\limits_1^x \Psi(\sigma, x) \ln(x) dx.$$

Тогда

$$\frac{\partial v_1(\sigma, t_0)}{\partial \sigma} = -\lim_{x \to +\infty} \varphi^*(\sigma, x).$$

Допустим, что функция $\varphi^*(\sigma, x)$ имеет бесконечно много нулей $c_1^* = 1, c_2^*, \ldots, c_n^*, \ldots$

Ясно, что $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n^* = +\infty$, так как функция $\varphi^*(\sigma, x)$ аналитическая и на любой ограниченной области может иметь только конечное множество нулей.

Тогда

$$\frac{\partial v_1(\sigma, t_0)}{\partial \sigma} = -\lim_{n \to +\infty} \varphi^*(\sigma, c_n^*) = 0.$$

Если же функция $\varphi^*(\sigma, x)$ имеет наибольший нуль $c^*$ , то она имеет на интервале $(c^*, +\infty)$ какой-то определённый знак.

Допустим, что $\varphi^*(\sigma, x) < 0$ на этом интервале[1].

Тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi^*(\sigma, x) = A \leqslant 0$. Если $A = 0$, то производная равна нулю.

Пусть $A < 0$.

Возьмём

$$\varepsilon = \min \left\{ v_1(\sigma, t_0) - \frac{t_0}{1 + t_0^2}, \frac{|A|}{2} \right\}.$$

Очевидно, что существует такое $p$, что при всех $x > p$

$$\varphi_p(\sigma, x) = \int\limits_p^x \Psi(\sigma, x) dx > 0, \; \varphi_p^*(\sigma, x) = \int\limits_p^x \Psi(\sigma, x) \ln x dx < 0.$$

Следовательно, при некотором $n$ таком, что $x_{2n} > p$ имеют место неравенства

$$\varphi_p(\sigma, x) = \int\limits_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} \Psi(\sigma, x) dx > 0, \; \varphi_p^*(\sigma, x) = \int\limits_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} \Psi(\sigma, x) \ln x dx < 0.$$

Но интервал $(x_{2n}, x_{2n+1})$ положительный и на нём должно выполняться неравенство

$$\varphi_p^*(\sigma, x) = \int\limits_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} \Psi(\sigma, x) \ln x dx > 0.$$

Противоречие.

Но тогда $A \geqslant 0$, следовательно,

$$\frac{\partial v_1(\sigma, t_0)}{\partial \sigma} = -A \leqslant 0.$$

Лемма 2 доказана. □

[1]Очевидно, что $c^*$ попадает на некоторый отрицательный интервал, то есть $c^* \in (x_{2n+1}, x_{2n+2})$ для некоторого натурального $n$. Отсюда следует, что $c \neq c^*$.

**Примечание**

Можно аналогично убедиться в том, что на множестве некритических значений переменной $\sigma$ функция $v_1(\sigma, t_0)$ возрастает.

# Доказательство гипотезы Римана

**Теорема.** *Если дзета-функция Римана при фиксированном $t = t_0 > 0$ имеет решение $s_0 = \sigma_0 + it_0$, то $\sigma_0 = 1/2$.*

*Доказательство.* Нетривиальный нуль дзета-функции является решением уравнения 2, значит, пара $(\sigma_0, t_0)$ удовлетворяет системе 4 и, в частности, второму уравнению этой системы.

Из лемм 1 и 2 следует, что эта пара единственная. Если при этом $\sigma_0 \neq 1/2$, то из свойства симметричности решений относительно прямой $\sigma = 1/2$ следует, что имеется и второе решение $1 - \sigma_0 + it_0$, и пара $(1 - \sigma_0, t_0)$ тоже удовлетворяет второму уравнению системы. Получается противоречие, следовательно, $\sigma_0 = 1/2$. $\square$

Гипотеза Римана доказана.

# Список литературы

[1] Галочкин А.И.,Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б.*Введение в теорию чисел*, (Изд-во Московского университета,1984).