Метод Коши решения краевых задач

© Н. М. Мусин

26.12.2020

УДК 519.63

При решении краевых задач применяют методы конечных или граничных элеменов (МКЭ или МГЭ). Допустим, имеется некоторый замкнутый контур C. Нас ведь не все точки внутри контура C интересуют, а, в крайнем случае, допустим, значение искомой функции в некоторой точке (x,y) внутри C. Метод МКЭ предлагает добираться до этой точки, покрыв область внутри C сеткой, постепенно подкрадываясь по ней от границы области, заполняя последовательно уровни сетки, при этом вычисляются значения в узлах сетки, значения в которых, вообще-то, не всегда нам нужны. Как видим, хотя МКЭ надёжно работает давно, но очень много требует ресурсов.

МГЭ разработан, как правило, теоретически, программных реализаций почти нет. Значение функции в любой точке внутри области можно свести к значениям граничных элементов, то есть размерность понижается на единицу, и необходимость строить сетку отпаает.

Возможен совершенно другой подход, формально похожий на МГЭ. Обратим внимание на интегральную формулу Коши из комплексного анализа, которая позволяет двумерную задачу свести к одномерной, как и в случае МГЭ. Если придумать, как применять формулу Коши, то МГЭ уже не нужен, ведь такие математические пакеты, как, например, Maple, MatLab или Wolfram Mathematica, «умеют» вычислять интегралы. Метод Коши позволяет отказаться от двумерной сетки и добираться до нужной точки непосредственно от границы. Всё сводится к вычислению интеграла на отрезке [a;b], с помощью которого мы можем параметризовать контур C.

Допустим, нас интересует некая функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексной переменной $z = x+iy$, про которую известно лишь, что она определена и аналитична внутри области, ограниченной некоторым замкнутым кусочно-гладким контуром C на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и непрерывна на замыкании области, причём известны лишь её значения на контуре C, параметризованной формулой $z = z(t)$, $t \in [a, b]$. Тогда значение этой функции в произвольной точке a внутри области можно вычислить по интегральной формуле Коши:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z(t))}{z(t) - a} dz(t).$$

Проверим в Maple формулу Коши сначала на известных функциях, например,

на функции $f(z) = sin(z)$. В качестве контура C возьмём окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Параметризуем контур с помощью параметра t, а именно $z = e^{it}, t \in [0; 2\pi)$. Значения функции $f(z)$ на контуре будут тогда равны $z = sin(e^{it})$. Если $a = x + iy$, то требуем, чтобы $x^2 + y^2 < 1$, так как формула Коши восстанавливает значения искомой функции $f(z)$ только внутри контура, а вне контура выдаётся всегда 0.

На снимке рабочего листа Maple значение искомой функция в пробной точке $a = 0.3 + 0.5i$ вычисляется с помощью формулы Коши, а функция $g = sin(z)$ вычисляет функцию непосредственно в этой же пробной точке. Как видим, значения обеих функций в пробной точке совпадают. Очевидно, что одной пробной точки достаточно для того, чтобы избежать ошибки при наборе кода в Maple.

$$restart:$$

$$assume\left(x^2 + y^2 < 1\right): \ \#\ \textit{Точка (x,y) должна лежать внутри области (круга)}$$

$$x := 0.3 : y := 0.5 : \quad \#\ \textit{Задаём пробную точку}$$

$$z := \exp(I \cdot t): \quad \#\ \textit{Параметризуем границу области (окружность)}$$

$$g := z \rightarrow \sin(z): \quad \#\ \textit{Задаём значения на границе области}$$

$$f := (x, y) \rightarrow evalf\left(\frac{1}{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot I} \cdot \left(int\left(\frac{g(z) \cdot diff(z, t)}{z - x - I \cdot y}, t = 0 \,..\, 2 \cdot \mathrm{Pi}\right)\right)\right);$$

$$evalf(f(x, y));$$

$$(x, y) \rightarrow evalf\left(-\frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\left(\int_0^{2\pi} \frac{g(z)\left(\frac{\partial}{\partial t} z\right)}{z - x - \mathrm{I}\,y}\,\mathrm{d}t\right)}{\pi}\right)$$

$$0.333 + 0.498\,\mathrm{I}$$

$$z0 := x + I \cdot y: \ \#\ \textit{Вычисляем значение функции непосредственно}$$

$$g(z0)$$

$$0.333 + 0.498\,\mathrm{I}$$

Реализуем интегральную формулу Коши в пакете MatLab. Отрезок $[0; 2\pi)$ параметра t разделим на 100 равных частей, вычислим значение подынтегральной функции на каждом узле этой одномерной дискретной сетки и её значения запишем в массив z, затем по массивам t и z вычислим интеграл методом трапеций, применив команду trapz(t,z). По-прежнему x = 0.3, y = 0.5. Как видим, получается, с учётом округления, то же самое значение искомой функции в пробной точке $a = 0.3 + 0.5i$.

$$x = 0.3; \quad y = 0.5; \quad dt = 2 * pi/100; \quad t = 0 : dt : 2 * pi;$$

$$z = sin(exp(i * t)) * i. * exp(i * t)./(exp(i * t) - x - y * i)/(2 * pi * i);$$

$$f = trapz(t, z)$$

$$f =$$

$$0.3332 + 0.4978i$$