Компьютерные эксперименты с дзета-функцией Римана

Н.М.Мусин
intermedia@live.ru

В данной статье в среде Maple наглядно иллюстрируются основные идеи доказательства гипотезы Римана. Для понимания достаточно знать, что такое комплексное число и иметь самое элементарное понятие о дзета-функции Римана. Можно даже не знать, что такое интеграл и знак суммирования, воспринимая их в тексте как красивые иероглифы. Можно, наверно, сразу же перейти к части **2.Компьютерные эксперименты**, обращаясь к части **1.Введение** за пояснениями.

Желающие ознакомиться с математическим доказательством могут найти его на сайте http://riemann.ucoz.net/ , там же есть и видеолекция.

1. Введение

Пусть $s=\sigma+it$ – комплексная переменная, где $\sigma=\operatorname{Re}s,\ t=\operatorname{Im}s$.
$x\in\mathbb{R}$ - действительная переменная.

Известно [1], что при $\operatorname{Re}s>0, s\neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{s-1}-s\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx \qquad (1)$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x.
Перепишем равенство (1) в виде

$$\zeta(s)=s\left(\frac{1}{s-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx\right)$$

Показывается, что уравнение (1) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\cos(t\ln x)dx=\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx=\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.\end{cases} \qquad (2)$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t>0$ **.**

В дальнейшем изложении всегда $0<\sigma<1, t>0$.

Определение. Множество $0<\sigma<1, t>0$ будем называть *критической полуполосой*.

Гипотеза Римана сводится к установлению того, будет ли выполняться равенство $\sigma=1/2$ для всех решений системы (2) или нет на этой полуполосе.

Поведение левых и правых частей равенств системы (2)

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\cos(t\ln x)dx,$$

$$v_1(\sigma,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx,$$

$$u_2(\sigma,t)=\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},$$

$$v_2(\sigma,t)=\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Равенство (1) можно переписать в виде

$$u_1(\sigma,t)-iv_1(\sigma,t)=u_2(\sigma,t)-iv_2(\sigma,t).$$

Таким образом, систему (2) можно записать в виде

$$\begin{cases}u_1(\sigma,t)=u_2(\sigma,t),\\ v_1(\sigma,t)=v_2(\sigma,t).\end{cases} \qquad (3)$$

Если $s_0=\sigma_0+it_0$ - нетривиальное решение уравнения (1), то (σ_0,t_0) является решением системы (3) и, в частности, уравнения $v_1(\sigma,t)=v_2(\sigma,t)$ этой системы. Далее изучаем поведение левой и правой частей именно этого уравнения. Изучение другого уравнения логической необходимости для доказательства гипотезы Римана не имеет.

Следующие леммы1, 2, 3 и теорема доказаны в статьях на сайте http://riemann.ucoz.net/

Лемма 1. Функция $v_2(\sigma,t_0)$ при фиксированном $t_0>0$ возрастает как функция от $\sigma\in(0;1)$.

Лемма 2. Пусть при некотором $t_0>0$ и некоторых σ,σ' таких, что $0<\sigma<\sigma'<1$, выполняются неравенства $v_1(\sigma,t_0)>0$ и $v_1(\sigma',t_0)>0$. Тогда имеет место неравенство $v_1(\sigma,t_0)>v_1(\sigma',t_0)$.

Определение. Прямоугольник $0<\sigma<1,\ t_0/(1+t_0^2)<w<1/t_0$ будем называть *критическим прямоугольником.* Значение переменной σ, при котором соответствующая точка $(\sigma,v_1(\sigma,t_0))$ графика функции $v_1(\sigma,t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть *критическим значением*.

Лемма 3

Функция $v_1(\sigma,t_0)$ при фиксированном $t=t_0$ является убывающей функцией от σ на множестве критических точек.

Теорема

Если дзета-функция Римана при фиксированном $t_0>0$ имеет нуль $s_0=\sigma_0+it_0$, то $\sigma_0=1/2$.

2. Компьютерные эксперименты

Теперь покажем, как можно поэкспериментировать с участвовавшими в доказательстве гипотезы функциями.

Из равенства

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$$

следует, что

$$v_1 = \mathrm{Im}\left(\frac{\zeta(s)}{s} - \frac{1}{s-1}\right)$$

$$u_1 = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}\right).$$

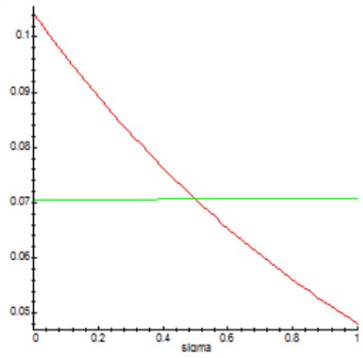
Возьмём один из известных нетривиальных нулей

$$\tfrac{1}{2} + i14.134725\ldots$$

Для экспериментов используем пакет Maple V.

Строим графики левой и правой частей уравнения $v_1(\sigma,t) = v_2(\sigma,t)$.

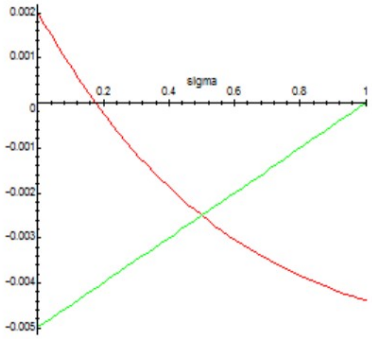
```
restart: with(plots): s:=sigma+I*t:
t:=14.134725:
v1:=Zeta(s)/s-1/(s-1):v1:=evalc(Im(v1)):v2:=t/((sigma-1)^2+t^2):
plot([v1,v2],sigma=0..1);
```



Как видим, результат очень неплохой. Наведя мышку в точку пересечения графиков, видим в окошечке результат примерно 0,4956.

Построим теперь графики левой и правой частей уравнения $u_1(\sigma,t) = u_2(\sigma,t)$:

```
restart: with(plots): s:=sigma+I*t:
t:=14.134725:
u1:=1/(s-1)-Zeta(s)/s:u1:=evalc(Re(u1)):u2:=(sigma-1)/((sigma-1)^2+t^2):
plot([u1,u2],sigma=0..1);
```

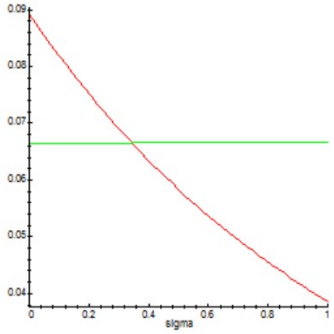


Результат потрясающий! Получающееся значение σ удовлетворяет обоим уравнениям системы.

Возьмём теперь другое значение t, например, $t = 15$, комплексное число с такой мнимой частью, как известно, не является нулём дзета-функции.

Для уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$ получаем:

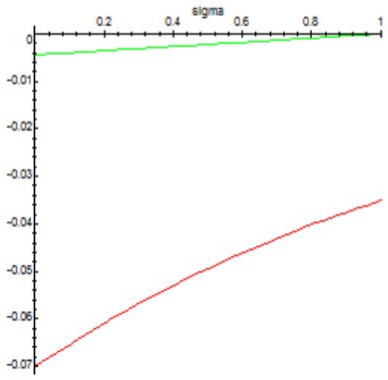
```
restart: with(plots): s:=sigma+I*t:
t:=15:
v1:=Zeta(s)/s-1/(s-1):v1:=evalc(Im(v1)):v2:=t/((sigma-1)^2+t^2):
plot([v1,v2],sigma=0..1);
```



Результат на первый взгляд обескураживает, казалось бы, при $t = 15$ есть решение, когда σ явно меньше ½…

Но, построив графики для уравнения $u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t)$, получаем:

```
restart: with(plots): s:=sigma+I*t:
t:=15:
u1:=1/(s-1)-Zeta(s)/s:u1:=evalc(Re(u1)):u2:=(sigma-1)/((sigma-1)^2+t^2):
plot([u1,u2],sigma=0..1);
```



Таким образом, система не имеет решений.

Читатель может поэкспериментировать и убедиться, что приведённые результаты верны и для других известных нулей функции Римана.

Список литературы

[1] А.И.Галочкин, Ю.В.Нестеренко, А.Б.Шидловский/ Введение в теорию чисел. М.: Изд-во Московского университета, 1984.