Об одном аналитическом продолжении дзета-функции Римана на множество $Res > 0, s \neq 1$.

© Н. М. Мусин

28 мая 2017 г.

УДК 511

Аннотация

Приводится простое доказательство теоремы об одном из аналитических продолжений дзета-функции Римана на множество $Res > 0, s \neq 1$.

Ключевые слова: гипотеза Римана, аналитическое продолжение, дзета-функция.

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
$x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная.

В [1] сформулирована и доказана следующая

Теорема. *При* $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ *дзета-функция Римана* $\zeta(s)$ *может быть представлена в виде*

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1}\frac{x-n}{x^{s+1}}dx$$

В [1] она доказывается как следствие других, более общих построений. Эта теорема оказалась полезной при доказательстве гипотезы Римана. Поэтому необходимо ещё раз убедиться в её справедливости непосредственно, без излишних усложнений. В данной статье это достигается простой подстановкой вместо комплексного числа s натурального числа k.

Доказательство теоремы

Вычислим сначала интеграл

$$\int\limits_{n}^{n+1}\frac{x-n}{x^{k+1}}dx = \left.\frac{(kn-kx-n)\,x}{x^{k+1}(k-1)k}\right|_{n}^{n+1} = -\frac{1}{(k-1)k}\left[\frac{k+n}{(n+1)^k} - \frac{1}{n^{k-1}}\right]$$

Теперь суммируем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{(k-1)k}\left[\frac{k+n}{(n+1)^k}-\frac{1}{n^{k-1}}\right] = -\frac{1}{(k-1)k}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{k+n}{(n+1)^k}-\frac{1}{n^{k-1}}\right] =$$
$$= -\frac{1}{(k-1)k}\left[\left(\frac{k+1}{2^k}-1\right)+\left(\frac{k+2}{3^k}-\frac{1}{2^{k-1}}\right)+\left(\frac{k+3}{4^k}-\frac{1}{3^{k-1}}\right)+\cdots\right] =$$
$$= -\frac{1}{(k-1)k}\left[-1+\frac{k-1}{2^k}+\frac{k-1}{3^k}+\frac{k-1}{4^k}+\cdots\right] =$$
$$= \frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{(k-1)k}\left[\frac{k-1}{2^k}+\frac{k-1}{3^k}+\frac{k-1}{4^k}+\cdots\right] =$$
$$= \frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k}\left[\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots\right].$$

Получаем:

$$1+\frac{1}{k-1}-k\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{x-n}{x^{k+1}}dx =$$
$$= 1+\frac{1}{k-1}-k\left\{\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k}\left[\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots\right]\right\} =$$
$$= 1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots$$

Единственность этого аналитического продолжения следует из того, что если в предыдущих выкладках вместо натурального числа k взять действительное число x, то на луче $[1;+\infty]$ оно совпадёт с рядом Дирихле

$$1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\cdots$$

Так как

$$\Big|\int_n^{n+1}\frac{x-n}{x^{s+1}}dx\Big| \leqslant \frac{1}{n^{\sigma+1}},$$

то отсюда следует, что $\sigma > 0$.

Список литературы

[1] Галочкин А.И.,Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б.*Введение в теорию чисел*, (Изд-во Московского университета,1984).