# О нетривиальных нулях дзета-функции Римана

© Н. М. Мусин

10.04.18

УДК 511

**Аннотация**

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то $(\sigma_0, t_0)$ является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных $\sigma$ и $t$.

Изучение одного из двух уравнений показало, что его левая часть возрастает, правая часть не возрастает при фиксированном $t = t_0 > 0$ как функции переменной $\sigma$ на множестве так называемых критических значений, значит, на «высоте» $t = t_0$ это решение единственно. Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $Re\, s = 1/2$ следует, что $\sigma_0 = 1/2$.

**Ключевые слова:** гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

## Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
$x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная.

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \tag{1}$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x$. Перепишем равенство 1 в виде

$$\zeta(s) = s \left( \frac{1}{s-1} - \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right)$$

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} \tag{2}$$

Имеют место равенства

$$\frac{1}{x^{s+1}} = \frac{1}{x^{\sigma+1}} \left(\cos(t\ln x) - isin(t\ln x)\right),$$
$$\frac{1}{s-1} = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} - i\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Поэтому уравнение 2 будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t\ln x)dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2}, \\ \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t\ln x)dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1$, $t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = 1/2$.

# О левых и правых частях уравнений системы 3

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma,t) = \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t\ln x)dx,$$
$$v_1(\sigma,t) = \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t\ln x)dx,$$
$$u_2(\sigma,t) = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},$$
$$v_2(\sigma,t) = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Таким образом, систему 3 можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma,t) = u_2(\sigma,t), \\ v_1(\sigma,t) = v_2(\sigma,t). \end{cases} \tag{4}$$

Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то $(\sigma_0, t_0)$ является решением системы 4 и, в частности, уравнения $v_1(\sigma,t) = v_2(\sigma,t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение левой и правой частей именно этого уравнения. Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

**Лемма 1.** *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной $\sigma$.*

*Доказательство.* Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma-1)t_0}{(t_0^2 + (\sigma-1)^2)^2} > 0$$

□

Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $(t_0/(1+t_0^2), 1/t_0)$.

Другими словами, график функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ целиком лежит в прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\ t_0/(1+t_0^2) < w < 1/t_0$. Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

**Определение 1.** *Прямоугольник $0 < \sigma < 1, t_0/(1+t_0^2) < w < 1/t_0$ будем называть критическим прямоугольником.*

**Определение 2.** *Значение переменной $\sigma$, при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.*

Таким образом, значение $\sigma_0$ является критическим значением переменной $\sigma$, т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике; в то же время это точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

**Лемма 2.** *Функция $v_1(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ не возрастает на множестве критических значений переменной $\sigma$.*

*Доказательство.* Пусть критические значения $\sigma, \sigma'$ таковы, что $\sigma < \sigma'$.

Обозначим $Q = v_1(\sigma, t_0) - v_1(\sigma', t_0)$.

Надо показать, что $Q \geqslant 0$.

Обозначим

$$\Psi(\sigma, x) = \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x)$$

.

Обозначим $\alpha = \sigma' - \sigma$.

Имеем равенства

$$v_1(\sigma, t_0) = \int\limits_1^\infty \Psi(\sigma, x) dx,$$

$$v_1(\sigma', t_0) = \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Введём функции

$$\varphi(x) = \int\limits_1^x \Psi(\sigma, x)dx,$$

$$\varphi_\alpha(x) = \int\limits_1^x \frac{1}{x^\alpha}\Psi(\sigma, x)dx.$$

Эти функции непрерывны.

Ясно, что имеют место равенства

$$v_1(\sigma, t_0) = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x),$$
$$v_1(\sigma', t_0) = \lim_{x\to+\infty} \varphi_\alpha(x).$$

На замкнутом луче $[1, +\infty]$ функция $\varphi(x)$ имеет только конечное множество нулей.

В самом деле, пусть функция $\varphi(x)$ имеет бесконечно много нулей
$c_1 = 1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$, так как функция $\varphi(x)$ аналитическая и на любом ограниченном интервале может иметь только конечное множество нулей.

Тогда

$$v_1(\sigma, t_0) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(c_n) = 0.$$

Но это противоречит тому, что $v_1(\sigma, t_0) > 0$, так как по условию $\sigma$ является критическим значением.

Точно так же функция $\varphi_\alpha(x)$ на этом луче имеет только конечное множество нулей, поскольку $\sigma'$ тоже по условию является критическим значением и, значит, $v_1(\sigma', t_0) > 0$.

Пусть $c$ - наибольший нуль функции $\varphi(x)$. Значит, непрерывная функция $\varphi(x)$ имеет на открытом луче $(c, +\infty)$ постоянный знак. Так как $v_1(\sigma, t_0) > 0$, то $\varphi(x) > 0$ в некоторой окрестности бесконечности и, следовательно, и на $(c, +\infty)$.

Аналогично, если $c_\alpha$ - наибольший нуль функции $\varphi_\alpha(x)$, то функция $\varphi_\alpha(x) > 0$ на открытом луче $(c_\alpha, +\infty)$.

Функция $\sin(t_0 \ln x)$ обращается в нуль в точках $x_k = e^{\pi k/t_0}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Более того, так как изначально $x \geqslant 1$, то из неравенства $t_0 \ln x \geqslant 0$ и равенства $t_0 \ln x = \pi k$ следует, что $k \geqslant 0$.

Ясно, что $x_0 = 1$.

Число $k$ будем называть номером интервала $(x_k, x_{k+1})$. На каждом из таких интервалов функция $\sin(t_0 \ln x)$ имеет один и тот же постоянный знак. Очевидно, на интервале с номером $k = 0$ этот знак положительный, далее при переходе с одного интервала на соседний знаки чередуются. Функции $\Psi(\sigma, x)$ и $1/x^\alpha\Psi(\sigma, x)$ обращаются

в нуль на конечном множестве попадающих в интервалы натуральных чисел (из-за множителя $\{x\}$), в остальных точках имеют тот же знак, что и $\sin(t_0 \ln x)$.

Так как $c$ и $c_\alpha$ - нули функций $\varphi(x)$ и $\varphi_\alpha(x)$ соответственно, то каждая из этих точек по отдельности либо лежит внутри некоторого интервала с чётным номером (а сами функции соответственно меняют свой знак с минуса на плюс), либо совпадает с левым концом интервала с чётным номером.

Введём в рассмотрение непрерывную функцию

$$\Omega(x) = \int\limits_1^x \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) \Psi(\sigma, x) dx.$$

Рассмотрим три случая.

**Случай 1.**

Пусть на открытом луче $(1, +\infty)$ функция $\Omega(x)$ не имеет нулей, поэтому на этом луче она знакопостоянна. Очевидно, что $\Omega(x_1) > 0$, следовательно, $\Omega(x) > 0$ всюду на этом луче, поэтому $Q = \lim\limits_{x \to +\infty} \Omega(x) \geqslant 0$.

**Случай 2.**

На замкнутом луче $[1, +\infty)$ функция $\Omega(x)$ имеет бесконечно много нулей $d_1 = 1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ Ясно, что $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = +\infty$, так как функция $\Omega(x)$ аналитическая и на любом ограниченном интервале может иметь только конечное множество нулей. Но тогда

$$Q = \lim_{n \to +\infty} \Omega(d_n) = 0.$$

**Случай 3.** На луче $(1, +\infty)$ функция $\Omega(x)$ имеет конечное множество нулей; пусть $d$ - наибольший нуль. Тогда

$$\Omega(x) = \int\limits_d^x \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) \Psi(\sigma, x) dx \text{ при } x \geqslant d.$$

Значит, на луче $(d, +\infty)$ функция $\Omega(x)$ имеет всюду какой-то определённый знак.

Если $d \in [x_{2k}, x_{2k+1})$ для какого-то целого $k = 0, 1, 2, \ldots$, то из неравенства $0 < 1/x^\alpha \Psi(\sigma, x) < \Psi(\sigma, x)$ всюду на интервале $(d, x_{2k+1})$, кроме конечного числа натуральных точек, следует, что $\Omega(x_{2k+1}) > 0$ и, следовательно, $\Omega(x) > 0$ на луче $(d, +\infty)$, значит, $Q \geqslant 0$.

Пусть $d \in [x_{2k+1}, x_{2k+2})$ для какого-то целого $k = 0, 1, 2, \ldots$, тогда $\varphi(d) = \varphi_\alpha(d)$.

Очевидно, что $\varphi(x) > \varphi_\alpha(x)$ при $x \in [x_{2k+1}, d)$ и $\varphi(x) < \varphi_\alpha(x)$ при $x \in (d, x_{2k+2})$, то есть $\Omega(x_{2k+2}) < 0$.

В то же время с учётом того, что отрезок $[x_{2k+2}, x_{2k+3}]$ в $e^{\pi/t_0} > 1$ раз больше отрезка $[x_{2k+1}, x_{2k+2}]$ и содержит не меньше натуральных точек, то при интегрировании по этому отрезку получаем $\varphi(x_{2k+3}) > \varphi_\alpha(x_{2k+3})$.

Таким образом, функция $\Omega(x)$ имеет на концах отрезка $[x_{2k+2}, x_{2k+3}]$ значения разных знаков, значит, обращается в нуль где-то на этом отрезке, что противоречит выбору точки $d$.

Лемма 2 доказана. $\square$

# Доказательство гипотезы Римана

**Теорема.** *Если дзета-функция Римана при фиксированном $t = t_0 > 0$ имеет решение $s_0 = \sigma_0 + it_0$, то $\sigma_0 = 1/2$.*

*Доказательство.* Нетривиальный нуль дзета-функции является решением уравнения 2, значит, пара $(\sigma_0, t_0)$ удовлетворяет системе 4 и, в частности, второму уравнению этой системы.

Из лемм 1 и 2 следует, что эта пара единственная. Если при этом $\sigma_0 \neq 1/2$, то из свойства симметричности решений относительно прямой $\sigma = 1/2$ следует, что имеется и второе решение $1 - \sigma_0 + it_0$, и пара $(1 - \sigma_0, t_0)$ тоже удовлетворяет второму уравнению системы. Получается противоречие, следовательно, $\sigma_0 = 1/2$. $\square$

Гипотеза Римана доказана.

# Список литературы

[1] Галочкин А.И.,Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б.*Введение в теорию чисел*, (Изд-во Московского университета,1984).