Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

© Н. М. Мусин

16.12.2019

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t.

Изучение одного из двух уравнений показало, что его левая часть не возрастает, правая часть возрастает при фиксированном $t = t_0 > 0$ как функции переменной σ на множестве так называемых критических значений, значит, на «высоте» $t = t_0$ это решение единственно. Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $Re\, s = 1/2$ следует, что $\sigma_0 = 1/2$.

Ключевые слова: гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
$x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная.

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \tag{1}$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. Перепишем равенство 1 в виде

$$\zeta(s) = s \left(\frac{1}{s-1} - \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right)$$

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} \tag{2}$$

Имеют место равенства

$$\frac{1}{x^{s+1}} = \frac{1}{x^{\sigma+1}} \left(\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)\right),$$
$$\frac{1}{s-1} = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Поэтому уравнение 2 будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2}, \\ \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1$, $t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = 1/2$.

О левых и правых частях уравнений системы 3

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma, t) = \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx,$$
$$v_1(\sigma, t) = \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx,$$
$$u_2(\sigma, t) = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},$$
$$v_2(\sigma, t) = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Таким образом, систему 3 можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t). \end{cases} \tag{4}$$

Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то (σ_0, t_0) является решением системы 4 и, в частности, уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение левой и правой частей именно этого уравнения. Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

Лемма 1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной σ.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma-1)t_0}{(t_0^2 + (\sigma-1)^2)^2} > 0$$

□

Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $(t_0/(1+t_0^2), 1/t_0)$.

Другими словами, график функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ целиком лежит в прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\ t_0/(1+t_0^2) < w < 1/t_0$. Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 1. *Прямоугольник $0 < \sigma < 1,\ t_0/(1+t_0^2) < w < 1/t_0$ будем называть критическим прямоугольником.*

Определение 2. *Значение переменной σ, при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.*

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ, т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике; в то же время это точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Обозначим

$$\Psi(\sigma, x) = \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x).$$

Тогда имеет место равенство

$$v_1(\sigma, t_0) = \int\limits_1^\infty \Psi(\sigma, x) dx.$$

Лемма 2. *Функция $v_1(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ не возрастает на множестве критических значений переменной σ.*

Доказательство. Пусть σ' - некоторое положительное число такое, что $\sigma + \sigma'$ - критическое значение. Надо показать, что $v_1(\sigma + \sigma', t_0) \leqslant v_1(\sigma, t_0)$.

Очевидно, что

$$\Psi(\sigma + \sigma', x) = \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x).$$

Тогда

$$v_1(\sigma+\sigma', t_0) = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Так как σ и $\sigma+\sigma'$ - критические значения, то $v_1(\sigma, t_0) > 0$ и $v_1(\sigma+\sigma', t_0) > 0$, поэтому для некоторого достаточно большого T_0 и любого $T > T_0$ имеют место неравенства

$$\int\limits_1^{T} \Psi(\sigma, x) dx > 0 \text{ и } \int\limits_1^{T} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx > 0.$$

Так как функция $\frac{1}{x^{\sigma'}}$ монотонно убывает по x, то по второй теореме о среднем для интеграла [2, с. 352] найдётся точка $\xi = \xi(T) \in [1, T]$, такая что

$$\int\limits_1^{T} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = A + \gamma B$$

,

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{T^{\sigma'}}, A = A(\xi) = \int\limits_1^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx \text{ и } B = B(\xi) = \int\limits_{\xi}^{T} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Ясно, что $0 < \gamma < 1, A + B > 0, A + \gamma B > 0$.

Утверждение леммы сводится к неравенству $A + \gamma B \leqslant A + B$.

При $\xi = 1$ получается $A = 0$, но $A + \gamma B > 0$, откуда $\gamma B > 0$, значит, $\gamma B < B$, поэтому лемма верна.

Пусть $\xi > 1$. Рассмотрим множество

$$M = \left\{ \xi \in \mathbb{R} : \int\limits_1^{T} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = A(\xi) + \gamma B(\xi) \right\}.$$

Доказательства второй теоремы о среднем [2, с. 352] сводятся к тому, что множество M является множеством нулей некоторой непрерывной функции на замкнутом отрезке и поэтому множество M замкнуто как прообраз одноточечного множества $\{0\}$. Кроме того, оно ограничено снизу 1, сверху T, поэтому $\inf M = \min M, \sup M = \max M$. Обозначим $\underline{\xi} = \min M, \overline{\xi} = \max M$. Итак, $M \subseteq [\underline{\xi}, \overline{\xi}]$.

Далее $A = A(\underline{\xi}), B = B(\underline{\xi})$.

Если $A \leqslant 0$, то $B > 0$, иначе было бы $A + B \leqslant 0$. В этом случае утверждение леммы очевидным образом выполняется.

Рассмотрим теперь случай $A > 0$.

Нам понадобится функция

$$\varphi(u) = \int\limits_u^{\underline{\xi}} \Psi(\sigma, x) dx + B, u \in [1; \underline{\xi}].$$

$\varphi(1) = A + B > 0$. В то же время $\varphi(\underline{\xi}) = B < 0$. В силу непрерывности функции $\varphi(u)$ на интервале $(1; \underline{\xi})$ имеется хотя бы один нуль ξ_0 этой функции. Ясно, что $\xi_0 < \underline{\xi}$.

Получаем

$$B_0 = \int\limits_{\xi_0}^{\underline{\xi}} \Psi(\sigma, x)dx + B = \int\limits_{\xi_0}^{T} \Psi(\sigma, x)dx = 0.$$

Очевидно, найдётся точка $\xi_1 \in (\xi_0, \underline{\xi})$ такая, что

$$\int\limits_{\xi_1}^{\underline{\xi}} \Psi(\sigma, x)dx = \gamma \int\limits_{\xi_0}^{\underline{\xi}} \Psi(\sigma, x)dx < 0.$$

Но тогда

$$\int\limits_{1}^{T} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x)dx =$$

$$= \int\limits_{1}^{\xi_0} \Psi(\sigma, x)dx + \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} \Psi(\sigma, x)dx + \int\limits_{\xi_1}^{\underline{\xi}} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma B <$$

$$< \int\limits_{1}^{\xi_0} \Psi(\sigma, x)dx + \int\limits_{\xi_1}^{\underline{\xi}} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma B =$$

$$= \int\limits_{1}^{\xi_0} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma \int\limits_{\xi_0}^{\underline{\xi}} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma B =$$

$$= \int\limits_{1}^{\xi_0} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma B_0 = \int\limits_{1}^{\xi_0} \Psi(\sigma, x)dx + B_0 = \int\limits_{1}^{T} \Psi(\sigma, x)dx.$$

Лемма 2 доказана для случая $\xi = \underline{\xi}$. Докажем, что она справедлива для любого $\xi \in M$.

Если $\underline{\xi} = \overline{\xi}$, то $B = \int\limits_{\underline{\xi}}^{T} \Psi(\sigma, x)dx = \int\limits_{\overline{\xi}}^{T} \Psi(\sigma, x)dx = \int\limits_{\xi_0}^{T} \Psi(\sigma, x)dx = 0$.

Пусть $\underline{\xi} < \overline{\xi}$.

Возьмём произвольные $\xi_1, \xi_2 \in M$, такие, что $\xi_1 < \xi_2$.

$$\int\limits_{1}^{T} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x)dx = \begin{cases} \int\limits_{1}^{\xi_1} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma \int\limits_{\xi_1}^{T} \Psi(\sigma, x)dx \\ \int\limits_{1}^{\xi_1} \Psi(\sigma, x)dx + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma \int\limits_{\xi_2}^{T} \Psi(\sigma, x)dx \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{1}^{\xi_1} \Psi(\sigma,x)dx + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma,x)dx + \gamma \int\limits_{\xi_2}^{T} \Psi(\sigma,x)dx = \int\limits_{1}^{\xi_1} \Psi(\sigma,x)dx + \gamma \int\limits_{\xi_1}^{T} \Psi(\sigma,x)dx.$$

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma,x)dx = \gamma \left(\int\limits_{\xi_1}^{T} \Psi(\sigma,x)dx - \int\limits_{\xi_2}^{T} \Psi(\sigma,x)dx \right) = \gamma \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma,x)dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma,x)dx = 0.$$

Итак, для любого $T > T_0$ доказано неравенство

$$\int\limits_{1}^{T} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma,x)dx \leqslant \int\limits_{1}^{T} \Psi(\sigma,x)dx.$$

Тогда легко доказывается методом от противного неравенство

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma,x)dx \leqslant \int\limits_{1}^{\infty} \Psi(\sigma,x)dx.$$

Лемма 2 доказана. □

Доказательство гипотезы Римана

Теорема. *Если дзета-функция Римана при фиксированном $t = t_0 > 0$ имеет решение $s_0 = \sigma_0 + it_0$, то $\sigma_0 = 1/2$.*

Доказательство. Нетривиальный нуль дзета-функции является решением уравнения 2, значит, пара (σ_0, t_0) удовлетворяет системе 4 и, в частности, второму уравнению этой системы.

Из лемм 1 и 2 следует, что эта пара единственная. Если при этом $\sigma_0 \neq 1/2$, то из свойства симметричности решений относительно прямой $\sigma = 1/2$ следует, что имеется и второе решение $1 - \sigma_0 + it_0$, и пара $(1 - \sigma_0, t_0)$ тоже удовлетворяет второму уравнению системы. Получается противоречие, следовательно, $\sigma_0 = 1/2$. □

Гипотеза Римана доказана.

Список литературы

[1] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. *Введение в теорию чисел.* Изд-во Московского университета, 1984.

[2] Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997.