

Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

Найл Минбариевич МУСИН

A proof of the Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function

Nail M. MUSIN

Аннотация. Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулем, то (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t .

Изучение одного из двух уравнений показало, что его левая часть не возрастает, а правая часть возрастает при фиксированном $t = t_0 > 0$ как функции переменной σ на множестве так называемых критических значений, значит, при $t = t_0$ это решение единственno. Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$ следует, что $\sigma_0 = 1/2$.

Ключевые слова: гипотеза Римана; дзета-функция; нетривиальные нули

Abstract. The Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function is proved.

If a complex number $s_0 = \sigma_0 + it_0$ is a nontrivial zero, then (σ_0, t_0) is a solution to a system of two equations of two real variables σ and t .

Considering one of that two equations one can find that the left side of it does not increase and the right one increases as a function of $\sigma \in (0; 1)$ on the set of so called critical values of σ at the $t = t_0$, so (σ_0, t_0) is the unique solution at $t = t_0$. As nontrivial zeros are symmetric about the line $\sigma = 1/2$ it follows that $\sigma_0 = 1/2$.

Keywords: the Riemann hypothesis; zeta function; nontrivial zeros

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$. Далее, пусть $x \in \mathbb{R}$ – действительная переменная.

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде¹

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \quad (0.1)$$

¹ В Приложении В эта формула будет передоказана.

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x . Перепишем равенство (0.1) в виде

$$\zeta(s) = s \left(\frac{1}{s-1} - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right)$$

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} \quad (0.2)$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{s+1}} &= \frac{1}{x^{\sigma+1}} (\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)), \\ \frac{1}{s-1} &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (0.2) будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{cases} \quad (0.3)$$

Эту систему называем *характеристической*.

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно действительной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1$, $t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = 1/2$.

1. О левых и правых частях уравнений характеристической системы

Введем следующие 4 функции:

$$\begin{aligned} u_1(\sigma, t) &= \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx, \\ u_2(\sigma, t) &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ v_1(\sigma, t) &= \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx, \\ v_2(\sigma, t) &= \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, характеристическую систему (0.3) можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Если $s_0 = \sigma + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то (σ_0, t_0) является решением системы (1.1) и, в частности, уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение левой и правой частей именно этого уравнения при изменении аргумента σ . Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

Лемма 1.1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной σ .*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma - 1)t_0}{(t_0^2 + (\sigma - 1)^2)^2} > 0$$

Из леммы (1.1) следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $(t_0/(1+t_0^2), 1/t_0)$.

Другими словами, график функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ целиком лежит в прямоугольнике

$$R = \left\{ (\sigma, w) \mid 0 < \sigma < 1, \frac{t_0}{1+t_0^2} < w < \frac{1}{t_0} \right\}$$

Определение 1.1. Прямоугольник R будем называть *критическим прямоугольником*.

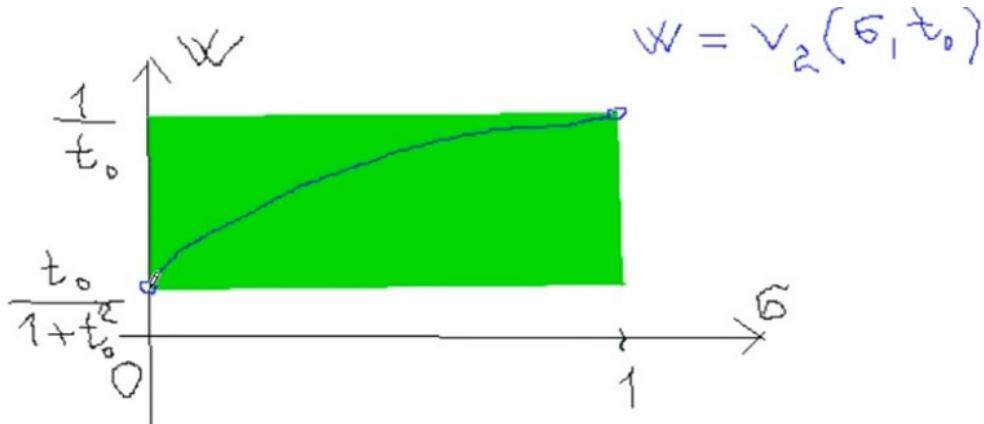


Рис. 1.1. Критический прямоугольник

Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 1.2. Значение переменной σ , при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть *критическим значением*.

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ , т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике; в то же время это точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Обозначим

$$\Psi(\sigma, x) = \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x).$$

Тогда имеет место равенство

$$v_1(\sigma, t_0) = \int_1^\infty \Psi(\sigma, x) dx.$$

Обозначим

$$U = \left(\frac{t_0}{1+t_0^2}; \frac{1}{t_0} \right).$$

Нам будет достаточно того, что функция $v_1(\sigma, t_0)$ непрерывна как действительная часть дзета-функции, поэтому для любой критической точки σ найдётся такое положительное δ , что образ δ -окрестности точки σ будет содержаться в U , то есть эта окрестность будет критическим подмножеством.

Пусть σ' - некоторое положительное число такое, что $\sigma + \sigma' < \sigma + \delta$, то есть $\sigma + \sigma'$ - критическое значение. Очевидно, что

$$\Psi(\sigma + \sigma', x) = \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x).$$

Так как σ и $\sigma + \sigma'$ - критические значения, то $v_1(\sigma, t_0) \in U$ и $v_1(\sigma + \sigma', t_0) \in U$, поэтому для некоторого достаточно большого X_0 и любого $X > X_0$ имеют место включения

$$\int_1^X \Psi(\sigma, x) dx \in U \text{ и } \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx \in U. \quad (1.2)$$

В частности,

$$\int_1^X \Psi(\sigma, x) dx > 0 \text{ и } \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx > 0.$$

2. Множества M , M_1 и их свойства

Обозначим $\Re[a, b]$ множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$. Нам будет полезна [2, с. 352]

Теорема 2.1. (вторая теорема о среднем для интеграла). *Если $f, g \in \Re[a, b]$ и g - монотонная на $[a, b]$ функция, то найдётся точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx.$$

Так как функция $\frac{1}{x^{\sigma'}}$ монотонно убывает по x , то по второй теореме о среднем для интеграла найдётся точка $\xi = \xi(X) \in [1, X]$, такая что

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = A + \gamma B$$

,

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{X^{\sigma'}}, A = A(\xi) = \int_1^\xi \Psi(\sigma, x) dx \text{ и } B = B(\xi) = \int_\xi^X \Psi(\sigma, x) dx.$$

Ясно, что $0 < \gamma < 1, A + B > 0, A + \gamma B > 0$.

Рассмотрим множество

$$M = \left\{ \xi \in \mathbb{R} \mid \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = A(\xi) + \gamma B(\xi) \right\}.$$

Другими словами, это множество нулей функции

$$F(z) = \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx - \int_1^z \Psi(\sigma, x) dx - \gamma \int_z^X \Psi(\sigma, x) dx.$$

Выше установлено, что это множество непусто.

Так как функция $\Psi(\sigma, x)$ имеет на отрезке $[1; X]$ лишь конечное множество точек разрыва (при натуральных значениях x , которые больше 1), то функция $F(z)$ непрерывна на замкнутом отрезке $[1; X]$ и поэтому множество M замкнуто как прообраз одноточечного множества $\{0\}$. Кроме того, оно ограничено снизу 1, сверху X , поэтому $\inf M = \min M, \sup M = \max M$. Обозначим $\underline{\xi} = \min M, \bar{\xi} = \max M$.

Итак, $M \subseteq [\underline{\xi}, \bar{\xi}]$.

Докажем следующее

П р е д л о ж е н и е 2.1. Для любых $\xi, \xi' \in M$

$$\int_{\xi}^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если множество M состоит из одного элемента, то равенство очевидно.

Пусть в множестве M имеется более одного элемента.

Возьмём произвольные $\xi, \xi' \in M$, такие, что $\xi < \xi'$.

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = \begin{cases} \int_1^\xi \Psi(\sigma, x) dx + \gamma \int_\xi^X \Psi(\sigma, x) dx \\ \int_1^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx + \int_\xi^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx + \gamma \int_{\xi'}^X \Psi(\sigma, x) dx \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_1^\xi \Psi(\sigma, x) dx + \int_\xi^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx + \gamma \int_{\xi'}^X \Psi(\sigma, x) dx &= \int_1^\xi \Psi(\sigma, x) dx + \gamma \int_\xi^X \Psi(\sigma, x) dx, \\ \int_\xi^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx &= \gamma \left(\int_\xi^X \Psi(\sigma, x) dx - \int_{\xi'}^X \Psi(\sigma, x) dx \right) = \gamma \int_\xi^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx, \\ \int_\xi^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx - \gamma \int_\xi^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx &= 0, (1 - \gamma) \int_\xi^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx = 0. \end{aligned}$$

Так как $\gamma < 1$, то получаем доказываемое равенство.

Предложение (2.1) доказано.

Как известно [2, с. 350], если $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ и g - неотрицательная и невозрастающая на $[a, b]$ функция, то найдётся точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx.$$

Применим эту разновидность второй теоремы о среднем в нашей ситуации: найдётся такая точка ξ_1 , что

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx. \quad (2.1)$$

Построим множество

$$M_1 = \left\{ \xi_1 \in \mathbb{R} \mid \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx \right\}.$$

По тем же причинам, что указывались выше для множества M , множество M_1 таких точек замкнуто и ограничено, то есть является компактным множеством, как и множество M . Пусть $\underline{\xi}_1, \overline{\xi}_1$ - соответственно, наименьший и наибольший элементы этого множества. Таким образом, $M_1 \subseteq [\underline{\xi}_1, \overline{\xi}_1]$.

П р е д л о ж е н и е 2.2. Для любых $\xi_1, \xi'_1 \in M_1$

$$\int_{\xi_1}^{\xi'_1} \Psi(\sigma, x) dx = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если множество M_1 состоит из одного элемента, то равенство очевидно.

Пусть в множестве M_1 имеется более одного элемента.

Возьмём произвольные $\xi, \xi' \in M_1$, такие, что $\xi \neq \xi'$.

Покажем сначала, что для любого $\xi_1 \in M_1$ имеет место равенство

$$\int_{\underline{\xi}_1}^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx = 0.$$

В самом деле,

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{\underline{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx,$$

в то же время

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{\underline{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\underline{\xi}_1}^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx,$$

следовательно,

$$\int_1^{\underline{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{\underline{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\underline{\xi}_1}^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx,$$

откуда и следует доказываемое равенство.

Возьмём теперь произвольные $\xi_1, \xi'_1 \in M_1$. Тогда

$$\int_{\xi_1}^{\xi'_1} \Psi(\sigma, x) dx = \int_{\xi_1}^{\underline{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\underline{\xi}_1}^{\xi'_1} \Psi(\sigma, x) dx = - \int_{\underline{\xi}_1}^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\underline{\xi}_1}^{\xi'_1} \Psi(\sigma, x) dx = 0.$$

П р е д л о ж е н и е 2.3. Пусть $B(\xi) \neq 0$ на всём² множестве M , тогда $M \cap M_1 = \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем методом от противного. В самом деле, пусть $\xi' \in M \cap M_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx &= \int_1^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx + \gamma B(\xi'), \\ \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx &= \int_1^{\underline{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx. \end{aligned}$$

Как видим, левые части равны, а правые части из-за того, что $B(\xi') \neq 0$, не равны.

Установление того, что M и M_1 являются компактными множествами, является неплохим развитием указанных выше разновидностей второй теоремы о среднем.

² Легко видеть, что если неравенство выполняется хотя бы в одной точке множества M , тогда, согласно Предложению 2.1, оно будет выполнено на всём множестве M .

Тем не менее, в Приложении А при таких очень сильных ограничениях, как в нашем случае, когда $g(x) = \frac{1}{x^\sigma}$, $f(x) = \Psi(\sigma, x) = \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x)$, доказывается, что M и M_1 конечны.

Из определений множеств M_1 и M следует, что

$$\begin{cases} \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx, \\ \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\xi_1}^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx + \frac{1}{X^{\sigma'}} \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx, \end{cases}$$

откуда получаем равенство

$$\int_{\xi_1}^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx + \frac{1}{X^{\sigma'}} \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx = 0. \quad (2.2)$$

3. Поведение функции $v_1(\sigma, t_0)$

Изначально функция $v_1(\sigma, t_0)$ была определена следующим образом:

$$v_1(\sigma, t_0) = \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx.$$

Но мы пока от интегрирования на бесконечном луче перешли к интегрированию на отрезке $[1; X]$, поэтому мы переопределим эту функцию следующим образом:

$$v_1(\sigma, t_0) = \int_1^X \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx.$$

Лемма 3.1. *Функция $v_1(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ не возрастает на множестве критических значений переменной σ .*

Доказательство. Пусть σ' - некоторое положительное число такое, что $\sigma + \sigma'$ - критическое значение. Надо показать, что $v_1(\sigma + \sigma', t_0) \leq v_1(\sigma, t_0)$.

Утверждение леммы (3.1) эквивалентно неравенству (3.1):

$$A + \gamma B \leq A + B. \quad (3.1)$$

Предложение 3.1. *Если неравенство (3.1) верно для некоторого $\xi' \in M$, то оно верно и для всех $\xi \in M$.*

Доказательство. Если $\underline{\xi} = \bar{\xi}$, то утверждение верно.

Пусть $\underline{\xi} < \bar{\xi}$. Возьмём теперь произвольное $\xi \in M$. Тогда

$$\begin{aligned}
A(\xi) + \gamma B(\xi) &= \int_1^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx + \gamma \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx = \\
&= \left(\underbrace{\int_1^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx}_{=0} + \underbrace{\int_{\xi'}^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx}_{=0} \right) + \gamma \left(\underbrace{\int_{\xi'}^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx}_{=0} + \int_{\xi'}^X \Psi(\sigma, x) dx \right) = \\
&= A(\xi') + \gamma B(\xi') \leq A(\xi') + B(\xi') = \int_1^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\xi'}^X \Psi(\sigma, x) dx = \\
&= \left(\underbrace{\int_1^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx}_{=0} + \underbrace{\int_{\xi}^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx}_{=0} \right) + \left(\underbrace{\int_{\xi'}^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx}_{=0} + \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx \right) = \\
&= A(\xi) + B(\xi).
\end{aligned}$$

Предложение (3.1) доказано.

Очевидно, что во всех случаях, когда $B \geq 0$ и A любое, неравенство (3.1) верно.

Теперь рассмотрим случай $B < 0$.

Очевидно, что в этом случае $A + \gamma B > A + B$, то есть функция $v_1(\sigma, t_0)$ возрастает. Дальнейшие рассуждения покажут, что при этом ни одно σ не будет критическим, то есть графики функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$ не пересекаются.

Обозначим

$$A_1 = \int_1^{\bar{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx, \quad B_1 = \int_{\bar{\xi}_1}^X \Psi(\sigma, x) dx, \quad C_1 = \int_{\bar{\xi}_1}^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx$$

Из определения множеств M и M_1 следует, что $A_1 > 0$ и $A + \gamma B = A_1$.

Далее рассматриваем случай

$$\boxed{\bar{\xi}_1 < \xi_1}$$

Если при этом $B_1 \geq 0$, то неравенство (3.1) справедливо, так как

$$A + \gamma B = A_1 \leq A_1 + B_1 = A_1 + C_1 + B = A + B.$$

Поэтому далее считаем, что $B_1 < 0$.

Из равенства 2.2 следует, в частности, что $C_1 + \gamma B = 0$. Так как $B < 0$, то $C_1 > 0$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \int_{\bar{\xi}_1}^z \Psi(\sigma, x) dx.$$

Получаем

$$\varphi(\xi) = C_1 > 0, \quad \varphi(X) = B_1 < 0.$$

Следовательно, на интервале (ξ, X) найдётся такая точка ξ' , что $\varphi(\xi') = 0$.

Поэтому

$$\int_1^{\bar{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Это означало бы, что $\xi' \in M_1$, но ведь $\bar{\xi}_1 = \max M_1$, а в рассматриваемом случае $\bar{\xi}_1 < \xi'$, поэтому $\xi' \notin M_1$. Из полученного противоречия следует, что рассматривавшийся случай $\bar{\xi}_1 < \xi$ не имеет места.

Случай $\bar{\xi}_1 = \xi$ невозможен согласно предложению (2.3).

Осталось рассмотреть случай

$$\boxed{\bar{\xi}_1 > \xi.}$$

В частности, имеет место неравенство $\bar{\xi} < \bar{\xi}_1$.

Из равенства 2.2 следует, в частности, что

$$\int_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx + \frac{1}{X^{\sigma'}} \int_{\bar{\xi}}^X \Psi(\sigma, x) dx = 0.$$

Так как $\int_{\bar{\xi}}^X \Psi(\sigma, x) dx < 0$, то из этого равенства следует, что $\int_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx > 0$.

Отсюда, а также из предложения (2.1) следует, что

$$\int_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx < 0, \text{ следовательно, } \int_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx = \int_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx < 0.$$

Нам понадобится функция

$$\varphi(z) = \int_z^{\bar{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Так как $\varphi(1) > 0, \varphi(\underline{\xi}) < 0$, то на интервале $(1; \underline{\xi})$ найдётся точка ξ' такая, что $\varphi(\xi') = 0$.

Следовательно,

$$\int_1^{\xi'} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{\bar{\xi}_1} \Psi(\sigma, x) dx,$$

то есть $\xi' \in M_1$.

Получается, что $\underline{\xi}_1 \leq \xi' < \underline{\xi}$.

Таким образом, в рассматриваемом случае для любого $\xi \in M$ выполняется двойное неравенство

$$\underline{\xi}_1 < \xi < \bar{\xi}_1.$$

Для дальнейшего продвижения вперёд нам потребуется разобрать поведение функции

$$\Phi(z) = \int_z^X \Psi(\sigma, x) dx.$$

Функция $\sin(t_0 \ln x)$ обращается в нуль в точках $x_k = e^{\pi k / t_0}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Более того, так как изначально $x \geq 1$, то из неравенства $t_0 \ln x \geq 0$ и равенства $t_0 \ln x = \pi k$ следует, что $k \geq 0$.

Ясно, что $x_0 = 1$.

Число k будем называть номером интервала (x_k, x_{k+1}) . На каждом из таких интервалов функция $\sin(t_0 \ln x)$ имеет один и тот же постоянный знак. Очевидно, на интервале с номером $k = 0$ этот знак положительный, далее при переходе с одного интервала на соседний знаки чередуются.

Интервалы с чётными номерами будем называть *положительными*, а интервалы с нечётными номерами назовём *отрицательными*.

Обозначим I^+ объединение всех положительных интервалов, I^- - объединение всех отрицательных интервалов.

В дальнейшем фиксируем произвольное значение $\sigma \in (0, 1)$.

Кроме концов интервалов, функция $\Psi(\sigma, x)$ на каждом интервале приобретает дополнительно ещё конечное множество нулей за счёт попадающих в интервал натуральных чисел (из-за множителя $\{x\}$), в остальных точках имеет тот же знак, что и $\sin(t_0 \ln x)$.

На отрезке $[1; X]$ содержится конечное множество натуральных чисел, больших 1, которые за счёт множителя $\{x\}$ являются точками разрыва. Других точек разрыва нет. Следовательно, функция $\Psi(\sigma, x)$ интегрируема на этом отрезке, поэтому функция $\Phi(z)$ непрерывна.

Точка $z = X$ является нулём функции $\Phi(z)$. Могут появиться дополнительные нули, если интегралы от функции $\Psi(\sigma, x)$ на множествах $[z; X] \cap I^+$ и $[z; X] \cap I^-$ равны по модулю. Множество нулей конечно, так как множества положительных и отрицательных интервалов, пересекающихся с отрезком $[1; X]$, конечны.

Рассмотрим случай, когда точка $z = X$ - единственный нуль функции $\Phi(z)$. Но тогда эта функция имеет какой-то один определённый знак на всём интервале $(1; X)$.

Если функция отрицательна на этом интервале (очевидно, что при этом точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ лежит ниже оси абсцисс σ и не может находиться в критическом прямоугольнике R), то тогда $\Phi(\xi) = B < 0$ и функция $v_1(\sigma, t_0)$ возрастает, а если положительна, то $\Phi(\xi) = B > 0$ и функция $v_1(\sigma, t_0)$ убывает.

В нашем случае $\Phi(1) = A + B > 0$, значит, функция $\Phi(z)$ положительна на всём интервале $(1; X)$. Следовательно, в этом случае доказываемое неравенство (3.1) выполняется.

Теперь рассмотрим случай, когда, кроме указанного нуля, есть ещё нули. Выше было установлено, что множество нулей конечно. Обозначим Z наименьший из этих нулей. Если $Z = 1$, то тогда $v_1(\sigma, t_0) = \Phi(1) = 0$, значит, точка $(\sigma, 0)$ лежит на оси абсцисс σ и не может находиться в критическом прямоугольнике R . Таким образом, $Z \neq 1$, значит, $Z > 1$.

Мы оказываемся в ситуации, когда функция $\Phi(z)$ имеет какой-то один определённый знак на всём интервале $(1; Z)$.

$$\int_1^X \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^Z \Psi(\sigma, x) dx + \underbrace{\Phi(Z)}_{=0} = \Phi_0(1) \in U, \text{ где } \Phi_0(z) = \int_z^Z \Psi(\sigma, x) dx.$$

Из этого включения следует, что функция $\Phi(z) = \Phi_0(z) + \underbrace{\Phi(Z)}_{=0} = \Phi_0(z)$ положительна на интервале $(1; Z)$. Кроме того, из этого включения и непрерывности функции $v_1(\sigma, t_0)$ следует, что $v_1(\sigma + \sigma', t_0) \in U$.

Согласно второй теореме о среднем для интеграла найдётся точка $\xi = \xi(Z) \in [1, Z]$, такая что

$$\int_1^Z \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = A + \gamma B$$

,

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{Z^{\sigma'}}, A = A(\xi) = \int_1^\xi \Psi(\sigma, x) dx \text{ и } B = B(\xi) = \int_\xi^Z \Psi(\sigma, x) dx.$$

Если, как и раньше, построить множество M всех таких точек ξ , то можно сделать вывод, что это равенство верно для любой точки множества M .

Наконец, замечаем, что $B = \Phi_0(\xi) > 0$, откуда следует, что функция $v_1(\sigma, t_0)$ убывает, что и требовалось доказать.

Таким образом, лемма (3.1) полностью доказана, то есть, если σ и $\sigma + \sigma'$, где $\sigma' > 0$ - критические точки, то для достаточно больших X

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx \leq \int_1^X \Psi(\sigma, x) dx.$$

Тогда легко доказывается методом от противного неравенство

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx \leq \int_1^\infty \Psi(\sigma, x) dx. \quad (3.2)$$

Но это означает, что функция

$$v_1(\sigma, t_0) = \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx$$

не возрастает на множестве критических точек.

4. Доказательство гипотезы Римана

Теорема 4.1. Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$, где $t_0 > 0$, то $\sigma_0 = 1/2$.

Доказательство. Нетривиальный нуль дзета-функции является решением уравнения (0.2), значит, пара (σ_0, t_0) удовлетворяет системе (1.1) и, в частности, второму уравнению этой системы, а именно $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$.

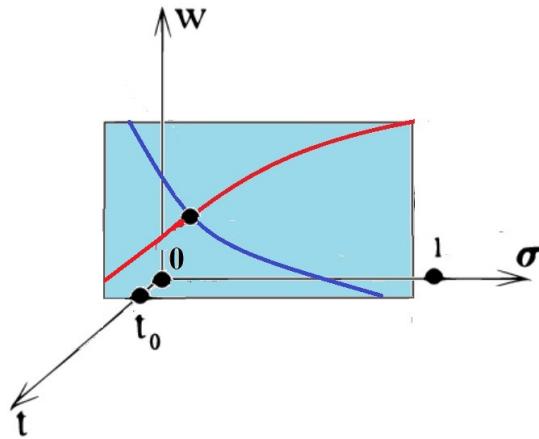


Рис. 4.1. Единственность точки пересечения

Точки (t_0, σ, w) плоскости $t = t_0$ будет удобно отождествлять с соответствующими точками (σ, w) плоскости $t = 0$, т.е. точка (t_0, σ, w) является *образом* точки (σ, w) при этом отождествлении.

Согласно лемме (1.1), график $w = v_2(\sigma, t_0)$ правой части возрастает и полностью содержится в образе критического прямоугольника R в плоскости $t = t_0$. Согласно лемме (3.1), график $w = v_1(\sigma, t_0)$ левой части не возрастает внутри критического прямоугольника, значит, эти графики имеют не более одной точки пересечения. Так как графики, как указано выше, пересекаются в точке (σ_0, w_0) , то эта точка является единственной точкой пересечения.

Как известно, если точка $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулем дзета-функции, то точка $1 - \sigma_0 + it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, тоже является нетривиальным нулем дзета-функции. Поэтому число $1 - \sigma_0$ является решением уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$.

Обозначим $\sigma_1 = 1 - \sigma_0$, $w_1 = v_1(\sigma_1, t_0) = v_2(\sigma_1, t_0)$. Следовательно, если при этом $\sigma_0 \neq 1/2$, то точка (σ_1, w_1) тоже является точкой пересечения графиков функций $w = v_1(\sigma, t_0)$ и $w = v_2(\sigma, t_0)$ в плоскости $t = t_0$, отличной от точки (σ_0, w_0) . Но выше было установлено, что эти графики могут пересекаться только в одной точке. Получается противоречие, следовательно, $\sigma_0 = 1/2$.

Приложение А. Мощность множеств M и M_1

Теорема 0.2. Множества M и M_1 конечны.

Доказательство. В основном тексте мы рассмотрели нули x_0, x_1, \dots функции $\sin(t_0 \ln x)$ и ввели понятия положительных и отрицательных интервалов.

Подберём такое натуральное число N , чтобы $X = x_N = e^{\pi N/t_0} > X_0$.

В дальнейшем фиксируем произвольное значение $\sigma \in (0, 1)$.

Рассмотрим функцию

$$\Psi(\sigma, x) = \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x).$$

Введём функцию

$$\varphi(\sigma, x) = \int_1^x \Psi(\sigma, x) dx.$$

Эта функция непрерывна, возрастает на положительных интервалах и убывает на отрицательных.

Доказательства второй теоремы о среднем [2, с. 352] сводятся к тому, что множество M_1 является множеством абсцисс точек пересечения графика функции φ с некоторой горизонтальной прямой. Эти графики строятся на отрезке $[1, X]$, являющимся объединением положительных и отрицательных интервалов и их концов, на каждом из которых будет не более одного пересечения, и поэтому множество M_1 состоит из не более чем N чисел.

Аналогично множество M тоже конечно.

Приложение Б. Компьютерные эксперименты с дзета-функцией Римана

Из равенства

$$\zeta(s) = s \left(\frac{1}{s-1} - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right)$$

следует, что

$$\begin{aligned} v_1 &= \operatorname{Im} s \left(\frac{\zeta(s)}{s} - \frac{1}{s-1} \right), \\ u_1 &= \operatorname{Re} s \left(\frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s} \right), \\ v_2 &= \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ u_2 &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \end{aligned}$$

Для экспериментов используем пакет Maple V.

Возьмём один из известных нетривиальных нулей $0.5 + i14.134725\dots$

Строим графики левой и правой частей уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$:

```

restart: with(plots): s:=sigma+I*t:
t:=14.134725:
v1:=Zeta(s)/s-1/(s-1):v1:=evalc(Im(v1)):v2:=t/((sigma-1)^2+t^2):
plot([v1,v2],sigma=0..1):

```

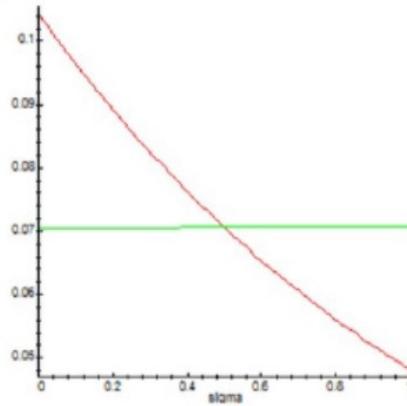


Рис. Б1. $\sigma = \frac{1}{2}$

Как видим, результат очень неплохой. Наведя мышку в точку пересечения графиков, видим в окошечке результат примерно 0.4956.

Построим теперь графики левой и правой частей уравнения $u_1 = u_2$:

```

restart: with(plots): s:=sigma+I*t:
t:=14.134725:
u1:=1/(s-1)-Zeta(s)/s:u1:=evalc(Re(u1)):u2:=(sigma-1)/((sigma-1)^2+t^2):
plot([u1,u2],sigma=0..1);

```

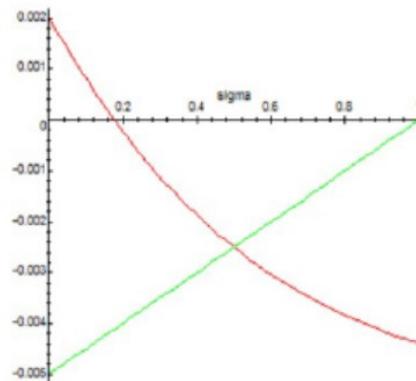


Рис. Б2. $\sigma = \frac{1}{2}$

Результат потрясающий! Получающееся значение σ удовлетворяет обоим уравнениям системы.

Возьмём теперь другое значение t , например, $t = 15$, комплексное число с такой мнимой частью, как известно, не является нулём дзета-функции.

Для уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$ получаем:

```

restart: with(plots): s:=sigma+I*t:
t:=15:
v1:=Zeta(s)/s-1/(s-1):v1:=evalc(Im(v1)):v2:=t/((sigma-1)^2+t^2):
plot([v1,v2],sigma=0..1);

```

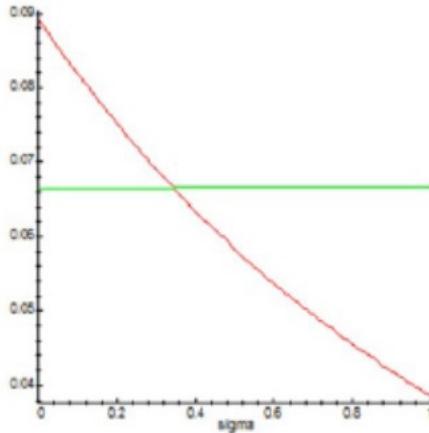


Рис. Б3. $\sigma \neq \frac{1}{2}$

Результат на первый взгляд обескураживает, казалось бы, при $t = 15$ есть решение, когда σ явно меньше 0.5.

Но, построив графики для уравнения $u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t)$, получаем:

```

restart: with(plots): s:=sigma+I*t:
t:=15:
u1:=1/(s-1)-Zeta(s)/s:u1:=evalc(Re(u1)):u2:=(sigma-1)/((sigma-1)^2+t^2):
plot([u1,u2],sigma=0..1);

```

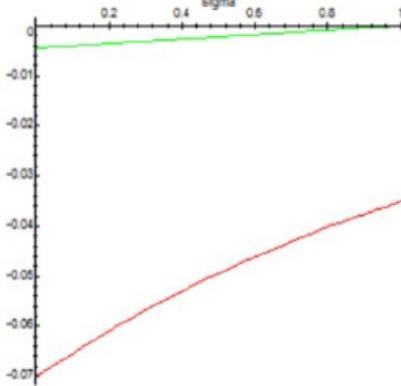


Рис. Б4. Нетривиального нуля не существует

Таким образом, система не имеет решений.

Читатель может поэкспериментировать и убедиться, что приведённые результаты верны и для других известных нулей функции Римана.

Ещё один эксперимент основан на том, что, если менять параметр t , то график функции $v_1(\sigma, t)$ располагается целиком либо выше оси абсцисс σ и убывает, либо целиком ниже этой оси и тогда возрастает. Можно сделать анимацию этого процесса:

> restart:

```

s:=sigma+I*t:
with(plots):

```

```

v:=Zeta(s):
v:=evalc(Im(v)):
animate(v,sigma=0..1,t=13..42,color=blue,frames=50;

```

Приложение В. Дзета-функция Римана на полу平面ости $\operatorname{Re} s > 0$

В [1] сформулирована и доказана следующая

Теорема 0.3. При $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{s+1}} dx$$

В [1] она доказывается как следствие других, более общих построений. Эта теорема оказалась полезной при доказательстве гипотезы Римана. Поэтому необходимо ещё раз убедиться в её справедливости непосредственно, без излишних усложнений. В данной статье это достигается простой подстановкой вместо комплексного числа s натурального числа k .

Доказательство. Вычислим сначала интеграл

$$\int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{k+1}} dx = \left. \frac{(kn-kx-n)x}{x^{k+1}(k-1)k} \right|_n^{n+1} = -\frac{1}{(k-1)k} \left[\frac{k+n}{(n+1)^k} - \frac{1}{n^{k-1}} \right]$$

Теперь суммируем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{(k-1)k} \left[\frac{k+n}{(n+1)^k} - \frac{1}{n^{k-1}} \right] &= -\frac{1}{(k-1)k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{k+n}{(n+1)^k} - \frac{1}{n^{k-1}} \right] = \\ &= -\frac{1}{(k-1)k} \left[\left(\frac{k+1}{2^k} - 1 \right) + \left(\frac{k+2}{3^k} - \frac{1}{2^{k-1}} \right) + \left(\frac{k+3}{4^k} - \frac{1}{3^{k-1}} \right) + \dots \right] = \\ &= -\frac{1}{(k-1)k} \left[-1 + \frac{k-1}{2^k} + \frac{k-1}{3^k} + \frac{k-1}{4^k} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{(k-1)k} \left[\frac{k-1}{2^k} + \frac{k-1}{3^k} + \frac{k-1}{4^k} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k} \left[\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{k-1} - k \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{k+1}} dx &= \\ &= 1 + \frac{1}{k-1} - k \left\{ \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k} \left[\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots \right] \right\} = \\ &= 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots \end{aligned}$$

Если в предыдущих выкладках вместо натурального числа k взять действительное число x , то на луче $[1; +\infty]$ получаем ряд Дирихле

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots$$

Так как

$$\left| \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{s+1}} dx \right| \leq \frac{1}{n^{\sigma+1}},$$

то отсюда следует, что $\sigma > 0$.

References

- [1] А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, *Введение в теорию чисел*, Изд-во Московского университета, М., 1984. [A. I. Galochkin, Ju. V. Nesterenko, A. B. Shidlovskij, *Vvedenie v teoriju chisel*, Izd-vo Moskovskogo universiteta, Moscow., 1984 (In Russian)].
- [2] В. А. Зорич, *Математический анализ. Часть I.*, 2-е изд., испр. и доп., Фазис, М., 1997; англ. пер.:V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, 2, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2015.
- [3] Н. М. Мусин, “Компьютерные эксперименты с дзета-функцией Римана”, *Журнал естественнонаучных исследований*, **2**:2 (2017), 47–52. [“Komp’juternye eksperimenty s dzeta-funktsiej Rimana”, *Zhurnal estestvennonauchnyh issledovanij*, **2**:2 (2017), 47–52 (In Russian)].