Дзета-функция Римана в Maple

© Н. М. Мусин

15 марта 2017 г.

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t. Изучение одного из двух уравнений показало, что его левая часть возрастает, правая убывает как функции переменной σ на множестве так называемых критических значений, значит, на «высоте» $t = t_0$ это решение единственно. Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $Res = 1/2$ следует, что $\sigma_0 = 1/2$.

Приводятся интересные компьютерные эксперименты в среде Maple.

Ключевые слова: гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
$x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная.

Как известно, Maple изначально «заточен» для работы на комплексной плоскости, поэтому специального пакета не требуется.

Вот самые первые шаги при работе с комплексными числами:

```
s:=sigma+I*t;
Re(s);
evalc(Re(s));
evalc(Im(s));
```

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx \tag{1}$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x.

Вот дробную часть числа Maple, к сожалению, выдаёт неправильно. Рекомендуемая им функция frac выдаёт, например, что $\frac{(}{-}1.8) = -0.8$, хотя на самом деле дробная часть числа -1.8 равна 0.2. С этим можно справиться, создав пользовательскую функцию fr:

```
fr:= x -> x - floor(x);
```

Перепишем равенство 1 в виде

$$\zeta(s) = s\left(\frac{1}{s-1} - \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx\right)$$

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} = \frac{1}{s-1} \tag{2}$$

Найдём с помощью Maple действительную и мнимую части выражений $1/x^{s+1}$ и $1/(s-1)$:

```
assume(x>0):assume(sigma>0):
evalc(Re(1/x^{s+1}));
simplify(%);
evalc(Im(1/x^{s+1}));
simplify(%);
evalc(Re(1/(s-1)));
evalc(Im(1/(s-1)));
```

Имеют место равенства

$$\frac{1}{x^{s+1}} = \frac{1}{x^{\sigma+1}}\left(\cos(t\ln x) - isin(t\ln x)\right),$$
$$\frac{1}{s-1} = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} - i\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Поэтому уравнение 2 будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\cos(t\ln x)dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2}, \\ \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1,\ t > 0$.

Определение 1. *Множество* $0 < \sigma < 1,\ t > 0$ *будем называть критической полуполосой.*

В дальнейшем изложении некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированым.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = 1/2$.

О левых и правых частях уравнений системы 3

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma,t)=\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\cos(t\ln x)dx,$$
$$v_1(\sigma,t)=\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx,$$
$$u_2(\sigma,t)=\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},$$
$$v_2(\sigma,t)=\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Равенство 2 можно переписать в виде

$$u_1(\sigma,t)-iv_1(\sigma,t)=u_2(\sigma,t)-iv_2(\sigma,t).$$

Таким образом, систему 3 можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma,t)=u_2(\sigma,t),\\ v_1(\sigma,t)=v_2(\sigma,t).\end{cases} \tag{4}$$

Если $s_0=\sigma_0+it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то (σ_0,t_0) является решением системы 4 и, в частности, уравнения $v_1(\sigma,t)=v_2(\sigma,t)$ этой системы. Далее изучаем поведение левой и правой частей именно этого уравнения. Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

Лемма 1. *Функция $w=v_2(\sigma,t_0)$ при фиксированном $t_0>0$ возрастает как функция от переменной σ.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{\partial v_2}{\partial\sigma}=-\frac{2(\sigma-1)t}{(t^2+(\sigma-1)^2)^2}>0$$

□

Производную можно вычислить в Maple:

```
v2:=t/((sigma-1)^2+t^2);
diff(v2,sigma);
simplify(%);
```

Лемма 2. *Пусть для некоторых σ,σ' таких, что $0<\sigma<\sigma'<1$, выполняются неравенства $v_1(\sigma,t_0)>0$ и $v_1(\sigma',t_0)>0$. Тогда имеет место неравенство $v_1(\sigma,t_0)>v_1(\sigma',t_0)$.*

Доказательство. Функция $\sin(t_0 \ln x)$ обращается в ноль в точках $x_k = e^{\pi k/t_0}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Более того, так как изначально $x \geq 1$, то из неравенства $t_0 \ln x \geq 0$ и равенства $t_0 \ln x = \pi k$ следует, что $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Так как функция e^x монотонно и неограниченно возрастает, то в каждый интервал $(n, n+1), n = 1, 2, \ldots$ оси абсцисс x попадает лишь конечное множество таких точек.[1] Таким образом, каждый из этих интервалов разбивается на некоторую конечную совокупность интервалов знакопостоянства функции $\sin(t_0 \ln x)$.

Обозначим U_n^+ совокупность интервалов знакоположительности, а U_n^- - совокупность интервалов знакоотрицательности на интервале $(n, n+1), n = 1, 2, \ldots$.

Обозначим $\Psi^+(\sigma, x)$ функцию, которая равна $\{x\} \sin(t_0 \ln x)/x^{\sigma+1}$ на $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^+$ и равна нулю на $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^-$.

Аналогично вводится функция $\Psi^-(\sigma, x)$.

В силу абсолютной сходимости ряда, задающего функцию $v_1(\sigma, t_0)$, получаем равенство

$$v_1(\sigma, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \Psi^+(\sigma, x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \Psi^-(\sigma, x) dx \tag{5}$$

Равенство 5 можно переписать в виде

$$v_1(\sigma, t_0) = \int_1^{\infty} \Psi^+(\sigma, x) dx + \int_1^{\infty} \Psi^-(\sigma, x) dx. \tag{6}$$

Так как, по условию, $v_1(\sigma, t_0) > 0$, то из равенства 6 получаем неравенство

$$0 < \int_1^{\infty} (-\Psi^-)(\sigma, x) dx < \int_1^{\infty} \Psi^+(\sigma, x) dx \tag{7}$$

Обозначим $\alpha = \sigma' - \sigma$. Очевидно, почти дословно повторив рассуждения, которые привели к равенству 5, получаем равенство

$$v_1(\sigma', t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\alpha}} \Psi^+(\sigma, x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\alpha}} \Psi^-(\sigma, x) dx$$

Его также перепишем в виде

$$v_1(\sigma', t_0) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} \Psi^+(\sigma, x) dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} \Psi^-(\sigma, x) dx.$$

[1] Например, компьютерные расчёты показали, что при $t_0 = 100$ в интервал (1; 2) попадают 22 таких точек.

Рассмотрим разность $v_1(\sigma, t_0) - v_1(\sigma', t_0)$. Определяем её знак.

$$
\begin{aligned}
v_1(\sigma, t_0) - v_1(\sigma', t_0) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \Psi^+(\sigma, x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \Psi^-(\sigma, x)dx - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\Psi^+(\sigma, x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\Psi^-(\sigma, x)dx = \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \Psi^+(\sigma, x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\Psi^+(\sigma, x)dx \right) + \\
&+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \Psi^-(\sigma, x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\Psi^-(\sigma, x)dx \right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) \Psi^+(\sigma, x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) \Psi^-(\sigma, x)dx = \\
&= \int\limits_1^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) \Psi^+(\sigma, x)dx + \int\limits_1^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) \Psi^-(\sigma, x)dx.
\end{aligned}
$$

Так как $1 - 1/x^\alpha > 0$, то из неравенства 7 очевидным образом следует, что

$$
\int\limits_1^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) (-\Psi^-)(\sigma, x)dx < \int\limits_1^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) \Psi^+(\sigma, x)dx
$$

Поэтому

$$
\int\limits_1^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) \Psi^+(\sigma, x)dx + \int\limits_1^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) \Psi^-(\sigma, x)dx > 0
$$

Это означает, что $v_1(\sigma, t_0) - v_1(\sigma', t_0) > 0$, следовательно, $v_1(\sigma, t_0) > v_1(\sigma', t_0)$, что и требовалось доказать. □

Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $(t_0/(1 + t_0^2), 1/t_0)$.

Другими словами, график функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ целиком лежит в прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\ t_0/(1 + t_0^2) < w < 1/t_0$.

Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 2. *Прямоугольник* $0 < \sigma < 1,\ t_0/(1 + t_0^2) < w < 1/t_0$ *будем называть критическим прямоугольником.*

Определение 3. *Значение переменной* σ*, при котором соответствующая точка* $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ *графика функции* $v_1(\sigma, t_0)$ *находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.*

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ, т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике; в то же время эта точка является пересечением графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Лемма 3. *Функция $v_1(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ является убывающей функцией от переменной σ на множестве её критических значений.*

Доказательство. Возьмём произвольные две критические точки σ_1 и σ_2, такие, что $\sigma_1 < \sigma_2$.

Так как функция $v_1(\sigma, t_0)$ на этих двух критических точках положительна, то из леммы 2 следует, что $v_1(\sigma_1, t_0) > v_1(\sigma_2, t_0)$, то есть лемма 3 доказана. □

Доказательство гипотезы Римана

Теорема 1. *Если дзета-функция Римана при фиксированном $t = t_0 > 0$ имеет решение $s_0 = \sigma_0 + it_0$, то $\sigma_0 = 1/2$.*

Доказательство. Нетривиальный нуль дзета-функции является решением уравнения 2, значит, пара (σ_0, t_0) удовлетворяет системе 4 и, в частности, второму уравнению этой системы.

Из лемм 2 и 3 следует, что эта пара единственная. Если при этом $\sigma_0 \neq 1/2$, то из свойства симметричности решений относительно прямой $\sigma = 1/2$ следует, что имеется и второе решение $1 - \sigma_0 + it_0$, и пара $(1 - \sigma_0, t_0)$ тоже удовлетворяет второму уравнению системы. Получается противоречие, следовательно, $\sigma_0 = 1/2$. □

Гипотеза Римана доказана.

Приложение. Компьютерные эксперименты

Теперь покажем, как можно поэкспериментировать с участвовавшими в доказательстве гипотезы функциями.

Из равенства 1 следует, что

$$v_1 = \mathrm{Im}\left(\frac{\zeta(s)}{s} - \frac{1}{s-1}\right), u_1 = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}\right).$$

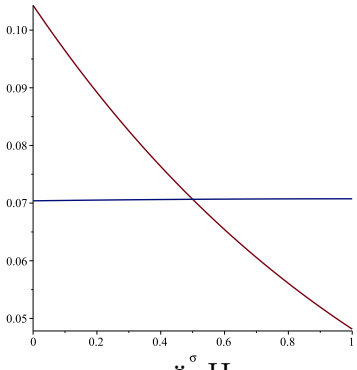
.

Возьмём один из известных нетривиальных нулей $1/2 + i14.134725\ldots$.

Для экспериментов используем пакет Maple.

Строим графики левой и правой частей уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$.

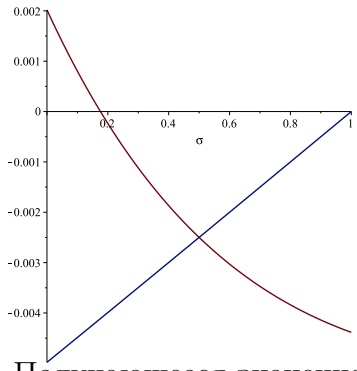
```
with(plots):
s:=sigma+I*t:
t:=15:
v1:=Zeta(s)/s - 1/(s-1): v1:=evalc(Im(v1)):
v2:=t/((sigma-1)^2+t^2):
plot([v1,v2],sigma=0..1);
```



Как видим, результат очень неплохой. Наведя мышку в точку пересечения графиков, видим в окошечке результат примерно 0,4956.

Построим теперь графики левой и правой частей уравнения $u_1(\sigma, t_0) = u_2(\sigma, t_0)$

```
with(plots):
s:=sigma+I*t:
t:=14.134725:
u1:=Zeta(s)/s - 1/(s-1): u1:=evalc(Im(v1)):
u2:=t/((sigma-1)^2+t^2):
plot([u1,u2],sigma=0..1);
```

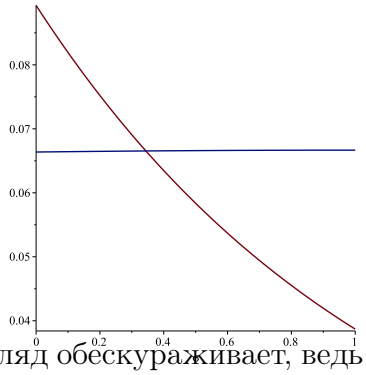


Результат потрясающий! Получающееся значение σ удовлетворяет обоим уравнениям системы.

Возьмём теперь другое значение t_0, например, $t_0 = 15$.

Для уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$получаем:

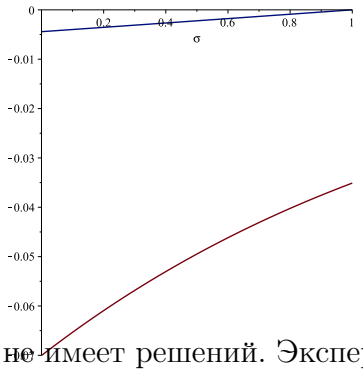
```
with(plots):
s:=sigma+I*t:
t:=15:
v1:=Zeta(s)/s - 1/(s-1): v1:=evalc(Im(v1)):
v2:=t/((sigma-1)^2+t^2):
plot([v1,v2],sigma=0..1);
```



Результат на первый взгляд обескураживает, ведь, казалось бы, при $t_0 = 15$ есть решение, когда σ явно меньше $1/2$.

Но, построив графики для уравнения $u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t)$, получаем:

```
with(plots):
s:=sigma+I*t:
t:=15:
u1:=Zeta(s)/s - 1/(s-1): u1:=evalc(Im(v1)):
u2:=t/((sigma-1)^2+t^2):
plot([u1,u2],sigma=0..1);
```



Таким образом, система не имеет решений. Эксперимент подтвердил известный факт, что при $t_0 = 15$ нетривиального нуля нет.

Читатель может поэкспериментировать и убедиться, что приведённые результаты верны и для других известных нулей функции Римана.

Список литературы

[1] Галочкин А.И.,Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б.*Введение в теорию чисел*, (Изд-во Московского университета,1984).