

Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

Proof of the Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function*

© Н. М. Мусин

10 июня 2024

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то пара (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t .

Изучение одного из этих двух уравнений показало, что из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ следует, что $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Ключевые слова: гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

Abstract

The Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function is proved.

If a complex number $s_0 = \sigma_0 + it_0$ is a nontrivial zero, then the pair (σ_0, t_0) is a solution to a system of two equations of two real variables σ and t .

Considering one of that two equations one can found that as nontrivial zeros are symmetric about the line $\sigma = \frac{1}{2}$ it follows that $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Keywords: the Riemann hypothesis, zeta function, nontrivial zeros.

*Работа выполнена без какой-либо финансовой поддержки.

1 Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
Далее, $x \in \mathbb{R}$ – действительная переменная.

Известно [1, с. 40], что при $\sigma > 0$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx. \quad (1)$$

Вывод формулы (1) имеется также в [2].

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1}. \quad (2)$$

Замечание 1. При работе с формулой (1) в [1, с. 34] авторы определили функцию x^s для $x > 0$ равенством $x^s = e^{s \ln x}$. Тогда $x^s = x^\sigma x^{it} = x^\sigma e^{it \ln x}$.

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{s+1}} &= \frac{1}{x^{\sigma+1}} (\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)), \\ \frac{1}{s-1} &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (2) будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{cases} \quad (3)$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси σ , поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1, t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

2 О левых и правых частях уравнений системы (3)

Введем следующие 4 функции:

$$\begin{aligned} u_1(\sigma, t) &= \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx, \\ v_1(\sigma, t) &= \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx, \\ u_2(\sigma, t) &= \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2}, \\ v_2(\sigma, t) &= \frac{t}{(\sigma - 1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, систему (3) можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t). \end{cases} \quad (4)$$

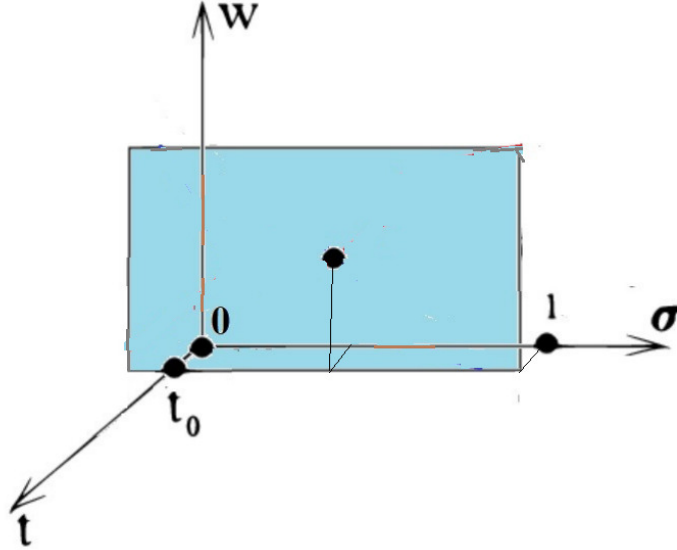


Рис. 1: Плоскость $t = t_0$

Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то пара (σ_0, t_0) является решением системы (4) и, в частности, уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение обеих частей именно этого уравнения как функции переменной σ ; будет показано, что из предположения $\sigma_0 \neq \frac{1}{2}$ получается противоречие, поэтому изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет (выбор уравнения решался путём подбрасывания монеты; при желании доказательство можно проводить, изучая только уравнение $u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t)$, схема та же самая).

Лемма 1. Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной σ .

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma - 1)t_0}{((\sigma - 1)^2 + t_0^2)^2} > 0.$$

□

Следствие. Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $U = \left(\frac{t_0}{1 + t_0^2}, \frac{1}{t_0} \right)$.

Определение 1. Прямоугольник $\left\{ (\sigma, w) \mid \sigma \in (0; 1), w \in U \right\}$ будем называть критическим прямоугольником.

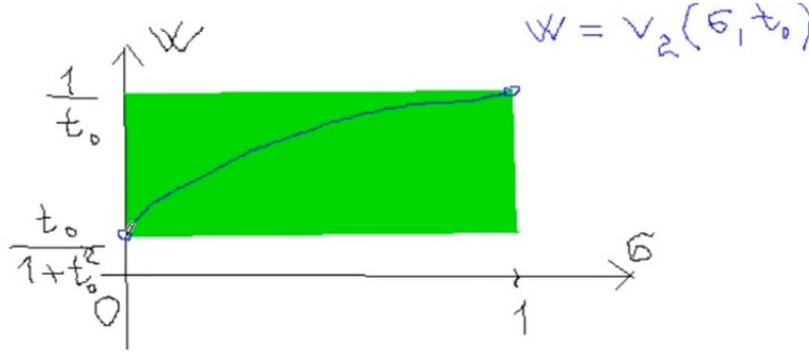


Рис. 2: Критический прямоугольник

Замечание 2. Критические прямоугольники очень тонкие, их ширина равна $\frac{1}{t_0} - \frac{t_0}{1 + t_0^2} = \frac{1}{(1 + t_0^2)t_0}$. Уже для нетривиального нуля с самой маленькой положительной мнимой частью $t_0 = 14.134725141\dots$ получается ширина $0.0003523461812\dots$

Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 2. Значение переменной σ , при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ , т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике как точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Если σ - критическое значение, то, согласно определению, $v_1(\sigma, t_0) \in \left(\frac{t_0}{1 + t_0^2}, \frac{1}{t_0} \right)$; в частности, $v_1(\sigma, t_0) > 0$.

3 Появляется функция $\hat{v}_1(\sigma, t)$

Лемма 2.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} \quad (5)$$

Доказательство. Обозначим $F(x)$ первообразную функции $\frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \int \sin(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} d \ln x = |u = \ln x| = \int \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} du = \\ &= -\frac{1}{\sigma} \int \sin(t_0 u) d e^{-\sigma u} = -\frac{1}{\sigma} \left(\sin(t_0 u) e^{-\sigma u} - \int e^{-\sigma u} d \sin(t_0 u) \right) = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} + \\ &+ \frac{t_0}{\sigma} \int e^{-\sigma u} \cos(t_0 u) du = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} + \frac{t_0}{\sigma} \int -\frac{1}{\sigma} \cos(t_0 u) d e^{-\sigma u} = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} - \\ &- \frac{t_0}{\sigma^2} \left(\cos(t_0 u) e^{-\sigma u} - \int e^{-\sigma u} d \cos(t_0 u) \right) = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} - \frac{t_0}{\sigma^2} \cos(t_0 u) e^{-\sigma u} - \\ &- \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} du = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} - \frac{t_0}{\sigma^2} \cos(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} - \\ &- \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \sin(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} d \ln x = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \\ &- \frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x). \end{aligned}$$

Получили равенство $F(x) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x)$, следовательно,

$$F(x) + \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma}.$$

$$\text{Итак, } \frac{t_0^2 + \sigma^2}{\sigma^2} F(x) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma}.$$

Далее,

$$\left. \frac{t_0^2 + \sigma^2}{\sigma^2} F(x) \right|_1^{+\infty} = -\left. \frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} \right|_1^{+\infty} - \left. \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} \right|_1^{+\infty} = \frac{t_0}{\sigma^2},$$

отсюда следует, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = F(x)|_1^{+\infty} = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

□

Замечание 3. Если бы мы вместо равенства $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$ системы (4) выбрали равенство $u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t)$, то нам пришлось бы доказывать равенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \cos(t_0 \ln x) dx = \frac{\sigma}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

Построим функцию

$$\hat{v}_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx.$$

Лемма 2 означает, что

$$\hat{v}_1(\sigma, t_0) = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

Графики функций $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$ расположены целиком в критическом прямоугольнике и симметричны в нём друг другу относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, пересекаясь в точке с абсциссой $\frac{1}{2}$.

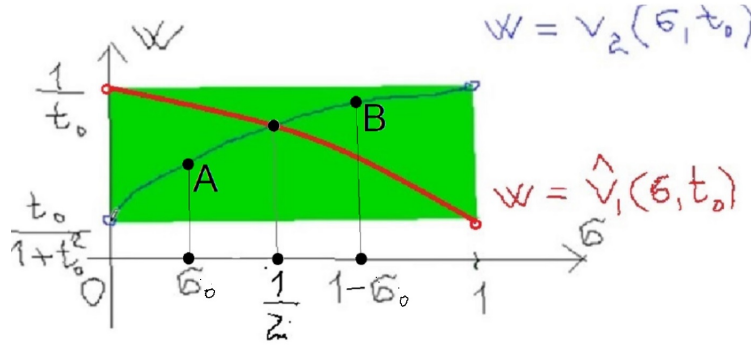


Рис. 3: Пересечение графиков $\hat{v}_1$ и v_2

В самом деле, функция $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$ убывает на $[0; 1]$ от $\frac{1}{t_0}$ до $\frac{1}{1+t_0^2}$, функция $v_2(\sigma, t_0)$ возрастает на $[0; 1]$ от $\frac{1}{1+t_0^2}$ до $\frac{1}{t_0}$, при этом

$$\hat{v}_1(\sigma, t_0) = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} = \frac{t_0}{(1 - (1 - \sigma))^2 + t_0^2} = v_2(1 - \sigma, t_0).$$

Равенство $\hat{v}_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$ означает то же самое, что и $\frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} = \frac{t_0}{(1 - \sigma)^2 + t_0^2}$, откуда следует, что графики $\hat{v}_1$ и v_2 пересекаются в точке с абсциссой $\sigma = \frac{1}{2}$.

4 О количестве нетривиальных нулей на высоте t_0

Дзета-функция является аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением точки $s = 1$, значит, она аналитична и на отрезке $\{\sigma + it_0 \mid \sigma \in [0; 1]\}$, поэтому на этом отрезке, благодаря его замкнутости и ограниченности, она может иметь лишь конечное множество нулей.

Как указывалось ранее, если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то пара (σ_0, t_0) будет решением системы 4.

Пусть $\hat{\sigma}$ - решение уравнения $u_1(\sigma, t_0) = u_2(\sigma, t_0)$, то есть $u_1(\hat{\sigma}, t_0) = \frac{\hat{\sigma} - 1}{(\hat{\sigma} - 1)^2 + t_0^2}$.

Составим уравнение $v_1(\sigma, t_0) = \frac{t_0}{\sigma - 1} u_1(\sigma, t_0)$ и подставим в него $\hat{\sigma}$, получаем $v_1(\hat{\sigma}, t_0) = \frac{t_0}{\hat{\sigma} - 1} u_1(\hat{\sigma}, t_0) = \frac{t_0}{\hat{\sigma} - 1} \frac{\hat{\sigma} - 1}{(\hat{\sigma} - 1)^2 + t_0^2} = \frac{t_0}{(\hat{\sigma} - 1)^2 + t_0^2}$, то есть пара $(\hat{\sigma}, t_0)$ является решением системы 4, а число $\hat{\sigma} + it_0$ не что иное как нетривиальный нуль дзета-функции.

Пусть теперь σ^* - решение уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$, то есть $v_1(\sigma^*, t_0) = \frac{t_0}{(\sigma^* - 1)^2 + t_0^2}$.

Составим уравнение $u_1(\sigma, t_0) = \frac{\sigma^* - 1}{t_0} v_1(\sigma, t_0)$ и подставим в него σ^* , получим $u_1(\sigma^*, t_0) = \frac{\sigma^* - 1}{t_0} v_1(\sigma^*, t_0) = \frac{\sigma^* - 1}{t_0} \frac{t_0}{(\sigma^* - 1)^2 + t_0^2} = \frac{\sigma^* - 1}{(\sigma^* - 1)^2 + t_0^2}$, значит, пара (σ^*, t_0) является решением системы 4, а число $\sigma^* + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции.

Таким образом, между множеством нетривиальных нулей на высоте t_0 и множеством решений уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$ имеется взаимно-однозначное соответствие. Оба этих множества оказались конечными.

Как известно, в комплексной плоскости (σ, t) , если точка $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то точка $1 - \sigma_0 + it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, тоже является нетривиальным нулём дзета-функции, то есть, если пара (σ_0, t_0) является решением уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$, то пара $(1 - \sigma_0, t_0)$ тоже будет решением этого же уравнения.

Построим функцию $v(\sigma, t_0) = v_1(\sigma, t_0) + v_1(1 - \sigma, t_0)$. Числа σ_0 и $1 - \sigma_0$ являются решениями уравнения $v(\sigma, t_0) = \frac{t_0}{(\sigma - 1)^2 + t_0^2} + \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}$.

График правой части этого равенства, то есть функция $w = \frac{t_0}{(\sigma - 1)^2 + t_0^2} + \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}$ на интервале $(0; 1)$, симметричен относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, а сама функция w имеет нулевую производную в точках

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4t^2 - 1 + 2\sqrt{4t^2 + 1}}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4t^2 - 1 - 2\sqrt{4t^2 + 1}}$, то есть при $t > \frac{\sqrt{3}}{2}$ один действительный корень и 4 мнимых корня, и тем более при $t > 14$ (у нетривиальных нулей самая маленькая положительная мнимая часть равна 14.134725141...)

Итак, производная функции $w(\sigma, t_0)$ на интервале $(0; 1)$ имеет только один нуль, на интервале $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ функция возрастает, на интервале $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ убывает, наибольшее значение достигается при $\sigma = \frac{1}{2}$.

Следовательно, если $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, то на высоте t_0 будет только один нетривиальный

нуль, а если $\sigma_0 \neq \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{2}$ не является решением уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$.

До сих пор мы рассматривали σ_0 как одно из решений уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$, далее мы из всех решений этого уравнения, расположенных левее $\frac{1}{2}$, выберем наибольшее и под σ_0 будем понимать именно его.

Отсюда следует, что на интервале $(\sigma_0, 1 - \sigma_0)$ нет других решений уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$.

Замечание 4. Это означает, что дуга (AB) графика v_1 (на рис.3 он «невидим») целиком лежит либо ниже, либо выше дуги (AB) графика v_2 .

5 Доказательство гипотезы Римана

Теорема. Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$, где $t_0 > 0$ - нетривиальный нуль дзета-функции Римана, то $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Функция v_1 непрерывна, значит, её график, проходя из точки A в точку B , пересекает график функции $\hat{v}_1$ в некоторой точке, абсциссу которой обозначим σ_1 (см. рис.4).

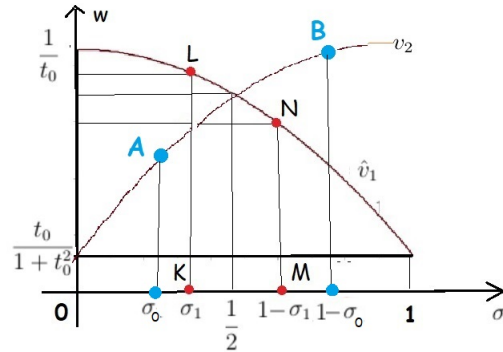


Рис. 4: Пересечение графиков $\hat{v}_1$ и v_1

Согласно замечанию 4 получается, что $\sigma_1 \neq \frac{1}{2}$.

Лемма 3. Если графики $\hat{v}_1$ и v_1 пересекаются в точке $L(\sigma_1, \hat{v}_1(\sigma_1))$, то они пересекутся и в точке $L(1 - \sigma_1, \hat{v}_1(1 - \sigma_1))$.

Доказательство. Перепишем равенство 1 в виде $\zeta(s) = -s \left(\frac{1}{1-s} + \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right)$.

Пусть $s = s_1$ — решение уравнения

$$\zeta(s) = -s \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right), \quad (6)$$

тогда $-s_1 \left(\frac{1}{1-s_1} + \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s_1+1}} dx \right) = -s_1 \left(\frac{1}{1-s_1} + \frac{1}{s_1} \right).$

Далее, $\frac{1}{1-s_1} + \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s_1+1}} dx = \frac{1}{1-s_1} + \frac{1}{s_1}.$ Как видим, в полученном равенстве правая часть при замене $s_1 \mapsto 1-s_1$ сохраняет своё значение. Следовательно, чтобы и левая часть сохранила это значение, интеграл после замены должен принять значение $\frac{1}{1-s_1} :$

$$\frac{1}{s_1} + \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{(1-s_1)+1}} dx = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{1-s_1}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} u_1(\sigma_1, t_1) - iv_1(\sigma_1, t_0) &= \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + t_0^2} - i \frac{t_0}{\sigma_1^2 + t_0^2}, \\ u_1(1-\sigma_1, t_1) - iv_1(1-\sigma_1, t_0) &= \frac{1-\sigma_1}{\sigma_1^2 + t_0^2} - i \frac{t_0}{(1-\sigma_1)^2 + t_0^2}, \text{ следовательно,} \\ v_1(\sigma_1, t_0) &= \frac{t_0}{\sigma_1^2 + t_0^2} = \hat{v}_1(\sigma_0, t_0), \\ v_1(1-\sigma_1, t_0) &= \frac{t_0}{(1-\sigma_1)^2 + t_0^2} = \hat{v}_1(1-\sigma_0, t_0). \end{aligned}$$

□

Итак, согласно доказанной лемме, если график v_1 проходит через точку L , то он проходит и через точку N , то есть получилась бы дуга $(ALNB)$ графика v_1 , но, согласно замечанию 4, это невозможно. Получилось противоречие.

Гипотеза Римана доказана.

□

6 О функции v_1

Функция $v_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx$ оказалась полезной при доказательстве гипотезы Римана.

Обозначим $\mathfrak{R}[a, b]$ множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$.

Нам понадобится следствие из следующей теоремы [3, с. 347]:

Теорема (первая теорема о среднем для интеграла). Пусть $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$ Если функция g неотрицательна (или неположи-

тельна) на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \text{ где } \mu \in [m, M].$$

Следствие. Пусть условия теоремы о среднем выполняются для любого

$b \in [a, +\infty)$ и существует такое действительное B , что $\int_a^b g(x)dx > 0$ при всех

$b > B$, пусть существуют несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^{+\infty} g(x)dx, \text{ где } \alpha \in [m, M].$$

Доказательство. Согласно теореме о среднем

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu(b) \text{ при } b > B, \text{ где } \mu(b) \in [m, M].$$

Так как несобственные интегралы существуют, то при $b \rightarrow +\infty$ существует предел левой части, а значит, существует и $\alpha = \lim_{b \rightarrow +\infty} \mu(b)$. Так как $\mu(b) \in [m, M]$, то и $\alpha \in [m, M]$. $\square$

Согласно следствию из первой теоремы о среднем для интеграла, для каждого $\sigma > 0$ и, тем более, для каждого $\sigma \in (0; 1)$ найдутся такие $\alpha(\sigma), \beta(\sigma) \in [0; 1]$, что

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} (1 + \sin(t_0 \ln x)) dx &= \alpha(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1 + \sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \alpha(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \alpha(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \\ &= \alpha(\sigma) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} (1 + \sin(t_0 \ln x)) dx = \beta(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \beta(\sigma) \frac{1}{\sigma} + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx. \quad (8)$$

Приравнивая правые части равенств 6 и 7, получаем

$$\alpha(\sigma) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} = \beta(\sigma) \frac{1}{\sigma} + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx,$$

отсюда получаем

$$\int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

Таким образом,

$$v_1(\sigma, t_0) = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0). \quad (9)$$

Замечание 5. Пусть σ — критическое значение.

Пусть $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) > 0$. Так как $v_1(\sigma, t_0) \in U$, то $\frac{1}{t_0} > v_1(\sigma, t_0) = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) > (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} > \alpha(\sigma) - \beta(\sigma)$, следовательно, $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) < \frac{1}{t_0}$.

Если же $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) < 0$, то $v_1(\sigma, t_0) = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) > \frac{t_0}{1 + t_0^2}$, $\beta(\sigma) - \alpha(\sigma) < (\beta(\sigma) - \alpha(\sigma)) \frac{1}{\sigma} < \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) - \frac{t_0}{1 + t_0^2} < \hat{v}_1(\sigma, t_0) < \frac{1}{t_0}$, следовательно, $\beta(\sigma) - \alpha(\sigma) < \frac{1}{t_0}$.

Таким образом, $|\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)| < \frac{1}{t_0}$.

Возьмём какую-либо точку $\sigma \in (0; 1)$. Рассмотрим случаи, когда функция $\alpha - \beta$ принимает отрицательное или нулевое значения.

1. $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) < 0$.

Из равенства 8 следует, что $v_1(\sigma, t_0) < \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) \leq \hat{v}_1(\sigma, t_0)$ при всех $\alpha \in (0; 1)$.

2. $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) = 0$.

Из равенства (8) следует, что $v_1(\sigma, t_0) = \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) \leq \hat{v}_1(\sigma, t_0)$ при всех $\sigma \in (0; 1)$. При $\alpha(\sigma) < 1$ точка $v_1(\sigma, t_0)$ лежит ниже точки $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$. При $\alpha(\sigma) = 1$ должно выполняться и равенство $\beta(\sigma) = 1$. Но ведь тогда из равенства

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \beta(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx \text{ получается равенство } \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx, \text{ которое}$$

не выполняется. Значит, равенство $\alpha(\sigma) = 1$ не достигается, поэтому $\alpha(\sigma) < 1$.

Таким образом, если v_1 отрицательна на каком-либо интервале, то соответствующая часть графика лежит ниже графика функции $\hat{v}_1$.

Предложение. Функция $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)$ непрерывна на $(0; 1)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(\sigma) = \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{\sigma+1}} dx$. Для

каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем неравенство $\int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{\sigma+1}} dx \leq \frac{1}{n^{\sigma+1}}$, поэтому функциональный ряд

для функции $\varphi(\sigma)$ мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma+1}}$ на отрезке $[\varepsilon, 1]$ для произвольного $\varepsilon \in (0; 1)$, следовательно, он по признаку Вейерштрасса на этом отрезке сходится равномерно, значит, функция $\varphi(\sigma)$ непрерывна на $[\varepsilon, 1]$. В силу произвольности ε функция $\varphi(\sigma)$ непрерывна на $(0, 1]$ и, значит, и на $(0, 1)$.

Функция β является непрерывной функцией на $(0; 1)$, так как, согласно определению, $\beta(\sigma) = \frac{\varphi(\sigma)}{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx}$, это отношение двух непрерывных функций, причём

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx = \frac{1}{\sigma} > 0.$$

Запишем равенство (8) в виде $\varphi(\sigma) + v_1(\sigma, t_0) = \alpha(\sigma) \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} \right)$; выражая из него $\alpha(\sigma)$, устанавливаем её непрерывность, поскольку выражение в скобках непрерывно и не равно нигде нулю на $(0; 1)$, а функция $v_1(\sigma, t_0)$ непрерывна как мнимая часть аналитической функции $\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}$, в соответствии с (1). $\square$

Если графики функций v_1 и $\hat{v}_1$ пересекаются, то

$$(\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) = \hat{v}_1(\sigma, t_0),$$

откуда следует, что $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) > 0$ на всём интервале $(0; 1)$.

Если гипотеза Римана верна, то графики функций v_1 и $\hat{v}_1$ пересекаются в единственной точке с абсциссой $\sigma_0 = 0.5$ и ординатой $\hat{v}_1(0.5) = \frac{t_0}{0.25 + t_0^2}$.

Таким образом, если $\frac{1}{2} + it_0$ — нуль дзета-функции Римана, то выполняется равенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{0.25 + t_0^2}.$$

В соответствии с системой 3 выполняется равенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \cos(t_0 \ln x) dx = -\frac{0.5}{0.25 + t_0^2},$$

а также и равенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \cos(t_0 \ln x) dx = -\frac{1}{2t_0} \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \sin(t_0 \ln x) dx.$$

В общем случае функция v_1 ведёт себя совершенно непредсказуемо, так как вычислить параметры $\alpha(\sigma)$ и $\beta(\sigma)$, от которых зависит её поведение, так, чтобы график функции v_1 прошёл через точку с абсциссой $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ нетривиального нуля, не представляется возможным.

Но, тем не менее, об этих параметрах можно кое-что сказать. Например, следующее: их можно, ради интереса, приближённо вычислить, уже зная положительную мнимую часть t_0 нетривиального нуля, например, $t_0 = 14.134725141\dots$ — наименьшая положительная мнимая часть известного нетривиального нуля.

Обозначим $\alpha(\sigma_0)$ и $\beta(\sigma_0)$ символами α_0 и β_0 соответственно.

Далее под σ_0 всегда будет подразумеваться $\frac{1}{2}$.

Как указано в замечении 4, для нетривиальных нулей с большими положительными мнимыми частями эти коэффициенты очень мало отличаются друг от друга.

При $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ выполняется равенство $(\alpha_0 - \beta_0)\frac{1}{\sigma_0} + \alpha_0\hat{v}_1(\sigma_0, t_0) = v_2(\sigma_0, t_0)$, из которого получаем $1.035329666\dots\alpha_0 - \beta_0 = 0.03532966658\dots$

Найдём теперь β_0 в соответствии с равенством $\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}} dx = \beta_0 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0+1}} dx$.

Сначала вычислим интеграл в левой части равенства.

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{x-k}{x^{\sigma+1}} dx &= |x = k+t| = \int_0^1 \frac{t}{(k+t)^{\sigma+1}} dt = \int_0^1 \frac{k+t}{(k+t)^{\sigma+1}} dt - \int_0^1 \frac{k}{(k+t)^{\sigma+1}} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(k+t)^\sigma} dt - k \int_0^1 \frac{1}{(k+t)^{\sigma+1}} dt = \left(\frac{1}{1-\sigma} \cdot (k+t)^{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \frac{1}{(k+t)^\sigma} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \left(\frac{1}{1-\sigma} \cdot (k+1)^{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \frac{1}{(k+1)^\sigma} \right) - \left(\frac{1}{1-\sigma} \cdot k^{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \frac{1}{k^\sigma} \right) = \\ &= \frac{(k+1)^{1-\sigma} - k^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \left(\frac{1}{(k+1)^\sigma} - \frac{1}{k^\sigma} \right). \end{aligned}$$

Наконец, получаем

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{x-k}{x^{\sigma+1}} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(k+1)^{1-\sigma} - k^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \left(\frac{1}{(k+1)^\sigma} - \frac{1}{k^\sigma} \right) \right).$$

$$\text{При } \sigma = \sigma_0 = \frac{1}{2} \text{ получаем } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0+1}} dx = 2, \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}} dx = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1 - 2\sqrt{k}\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}}.$$

$$\text{При } k = 1000000 \text{ получаем } \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}} dx = 0.9170582237\dots$$

Из равенства $0.9170582237 = \beta_0 \cdot 2$ получаем $\beta_0 = 0.4585291118\dots$

Теперь можем найти $\alpha_0 = \frac{\beta_0 + 0.03532966658}{1.035329666} = 0.4770063050$.

Попробуем теперь хотя бы приблизительно представить, как ведут себя левый и правый части уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$. Конечно, для этого надо бы знать значения коэффициентов $\alpha(\sigma)$ и $\beta(\sigma)$ при всех остальных значениях σ , и выражения для их вычисления приведены в этой части статьи, но они очень громоздки.

Если предположить, что $\alpha(\sigma) \approx \alpha\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\beta(\sigma) \approx \beta\left(\frac{1}{2}\right)$, то равенство (8) принимало бы приблизительно вид $v_1(\sigma, t_0) = \frac{0.0184771932}{\sigma} + \frac{6.742353011}{\sigma^2 + 199.7904548}$.

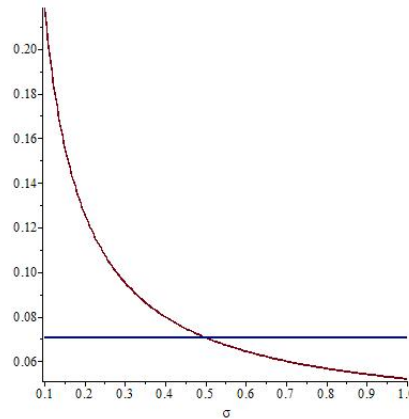


Рис. 5: Пересечение графиков v_1 и v_2

И это всё, что пока установлено.

Список литературы

- [1] А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, Введение в теорию чисел, Изд-во Московского университета, М., 1984. [A. I. Galochkin, Ju. V. Nesterenko, A. B. Shidlovskij, Vvedenie v teoriju chisel, Izd-vo Moskovskogo universiteta, Moscow., 1984 (In Russian)].
- [2] Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. М.:Изд-во иностранной литературы, 1953.
- [3] В . А. Зорич, Математический анализ. Часть I., 2-е изд., испр. и доп., Фазис, М., 1997; англ. пер. :V. A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2 ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2015.