

Дзета-функция Римана в Maple V. Продолжение

Эта статья является продолжением и исправлением моей статьи [3] от 2 ноября 2016 г., размещённой на этом сайте.

Приведу конспект той статьи.

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.

$x \in \mathbb{R}$ – действительная переменная. $\{x\}$ – дробная часть числа x .

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$$

Было показано, что нули дзета-функции удовлетворяют системе

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t) \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t) \end{cases}$$

где

$$u_1(\sigma, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx, \quad v_1(\sigma, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx,$$
$$u_2(\sigma, t) = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \quad v_2(\sigma, t) = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}.$$

Далее изучается поведение левой и правой частей второго уравнения системы

$v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 14$. Очевидно, что правая часть уравнения возрастает как функция от $\sigma \in (0; 1)$, при этом принимает значения в интервале $(t_0 / (1 + t_0^2), 1 / t_0)$.

Прямоугольник $0 < \sigma < 1, t_0 / (1 + t_0^2) < w < 1 / t_0$ будем называть *критическим прямоугольником*. Значение переменной σ , при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть *критическим значением*.

Лемма 3 (формулировка уточнена по сравнению с приведённой в первой статье):

Функция $v_1(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 14$ является убывающей функцией от σ на множестве критических точек.

Формулировку и доказательство теоремы 2 я немножко уточнил.

Теорема 2. Если дзета-функция Римана при фиксированном $t_0 > 14$ имеет нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$, то $\sigma_0 = 1/2$.

Доказательство. Очевидно, из сказанного выше следует, что $v_1(\sigma_0, t_0) = v_2(\sigma_0, t_0)$.

Значение σ_0 является критическим и, следовательно, часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, попадающая в критический прямоугольник и проходящая через точку (σ_0, t_0) , убывает, поэтому эта точка является единственной точкой пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Если при этом $\sigma_0 \neq 1/2$, то из свойства симметричности нулей дзета-функции относительно прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$ следует, что имеется и второе решение $s_0 = 1 - \sigma_0 + it_0$. Получается противоречие.

Гипотеза Римана доказана.

Теперь покажем, как можно поэкспериментировать с участвовавшими в доказательстве гипотезы функциями.

Из равенства $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$ следует, что

$$v_1 = \operatorname{Im} \left(\frac{\zeta(s)}{s} - \frac{1}{s-1} \right),$$

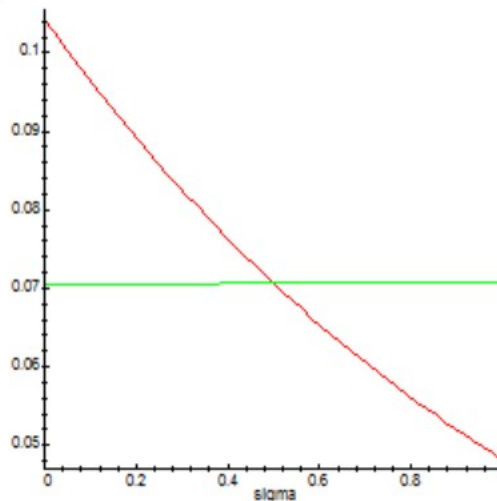
$$u_1 = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s} \right).$$

Известно [2], что первым нулём дзета-функции Римана, то есть имеющим наименьшую положительную ординату, является число $\frac{1}{2} + i14.134725\dots$

Проверим это в среде Maple V.

Строим графики левой и правой частей уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$.

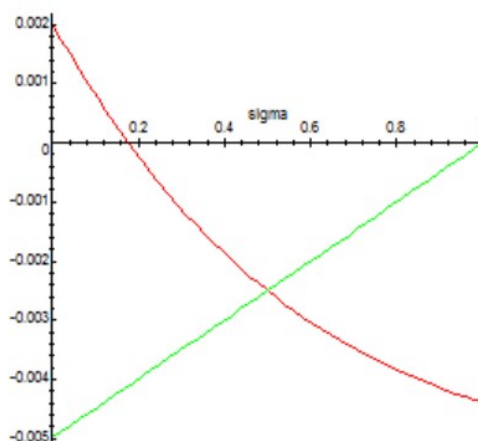
```
restart: with(plots): s:=sigma+I*t:
t:=14.134725:
v1:=Zeta(s)/s-1/(s-1):v1:=evalc(Im(v1)):v2:=t/((sigma-1)^2+t^2):
plot([v1,v2],sigma=0..1):
```



Как видим, результат очень неплохой. Наведя мышку в точку пересечения графиков, видим в окошечке результат примерно 0,4956.

Построим теперь графики левой и правой частей уравнения $u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t)$:

```
restart: with(plots): s:=sigma+I*t:
t:=14.134725:
u1:=1/(s-1)-Zeta(s)/s:u1:=evalc(Re(u1)):u2:=(sigma-1)/((sigma-1)^2+t^2):
plot([u1,u2],sigma=0..1):
```

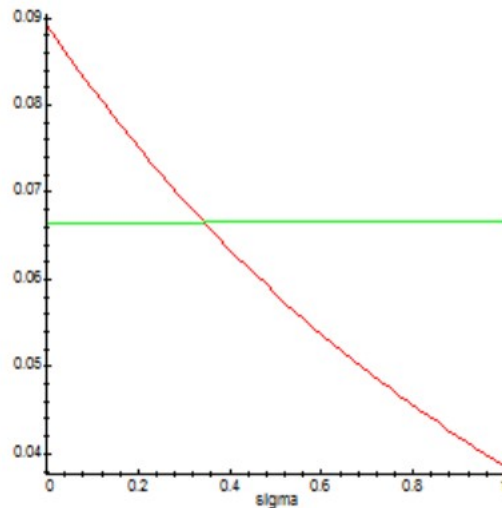


Результат потрясающий! Получающееся значение σ удовлетворяет обоим уравнениям системы.

Возьмём теперь другое значение t , например, $t = 15$.

Для уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$ получаем:

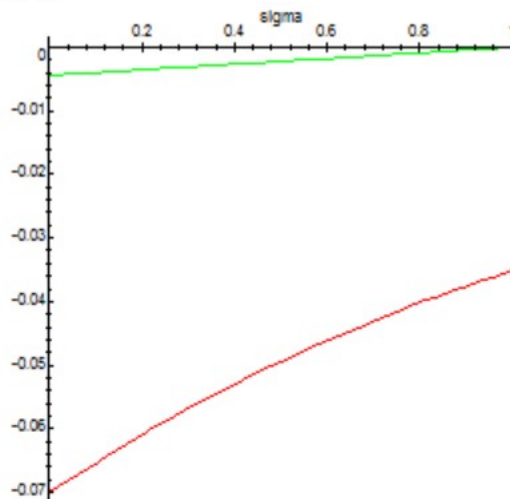
```
restart: with(plots): s:=sigma+I*t:
t:=15:
v1:=Zeta(s)/s-1/(s-1):v1:=evalc(Im(v1)):v2:=t/((sigma-1)^2+t^2):
plot([v1,v2],sigma=0..1);
```



Результат на первый взгляд обескураживает, казалось бы, при $t = 15$ есть решение, когда σ явно меньше $1/2$...

Но, построив графики для уравнения $u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t)$, получаем:

```
restart: with(plots): s:=sigma+I*t:
t:=15:
u1:=1/(s-1)-Zeta(s)/s:u1:=evalc(Re(u1)):u2:=(sigma-1)/((sigma-1)^2+t^2):
plot([u1,u2],sigma=0..1);
```



Таким образом, система не имеет решений.

И это хорошо!

Список литературы

- [1] А.И.Галочкин, Ю.В.Нестеренко, А.Б.Шидловский/ Введение в теорию чисел. М.: Изд-во Московского университета, 1984.
- [2] М.А.Королев. Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета - функции Римана. Изв.РАН. Сер.матем. 74, выпуск 4, с. 83-118, 2010.
- [3] Н.М.Мусин. Дзета-функция Римана в Maple V
<http://old.exponenta.ru/educat/systemat/musin/index14.asp>