

Инфинитезимальное доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

© Н. М. Мусин

06 июня 2026

УДК 511

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
 $x \in \mathbb{R}$ – действительная переменная.

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \quad (1)$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x .

Перепишем равенство 1 в виде

$$\zeta(s) = s \left(\frac{1}{s-1} - \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right)$$

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} \quad (2)$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{s+1}} &= \frac{1}{x^{\sigma+1}} (\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)), \\ \frac{1}{s-1} &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение 2 будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2}, \\ \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma - 1)^2 + t^2}. \end{cases} \quad (3)$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

Пусть $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - некоторый нетривиальный нуль.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

О левых и правых частях уравнений системы 3

Введем следующие 4 функции:

$$\begin{aligned} u_1(\sigma, t) &= \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx, \\ v_1(\sigma, t) &= \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx, \\ u_2(\sigma, t) &= \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2}, \\ v_2(\sigma, t) &= \frac{t}{(\sigma - 1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, систему 3 можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t). \end{cases} \quad (4)$$

$s = \sigma + it$ является нетривиальным нулём дзета-функции тогда и только тогда, когда (σ, t) является решением системы 4.

Лемма 1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ возрастает как функция от переменной $\sigma \in (0; 1)$.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma - 1)t_0}{(t_0^2 + (\sigma - 1)^2)^2} > 0$$

□

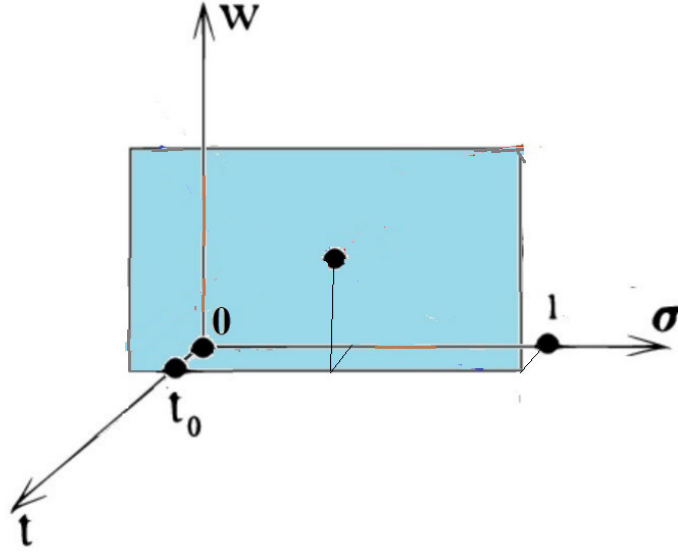


Рис. 1: Плоскость $t = t_0$

Областью значений функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ является интервал $U = \left(\frac{t_0}{1+t_0^2}, \frac{1}{t_0} \right)$.

Другими словами, график функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ целиком лежит в прямоугольнике $\Pi = \left\{ (\sigma, w) \mid \sigma \in (0; 1), w \in U \right\}$.

Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 1. Прямоугольник Π будем называть критическим прямоугольником.

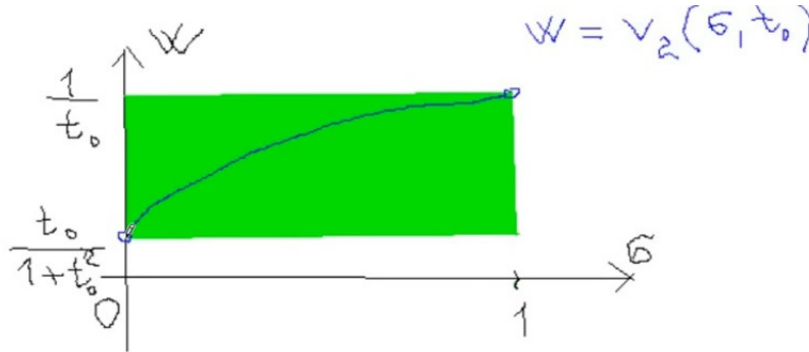


Рис. 2: Критический прямоугольник

Замечание 1. Критические прямоугольники очень тонкие, их ширина равна $\frac{1}{t_0} - \frac{t_0}{1+t_0^2} = \frac{1}{(1+t_0^2)t_0}$. Уже для нетривиального нуля с самой маленькой положительной мнимой частью $t_0 = 14.134725141\dots$ получается ширина $0.0003523461812\dots$

Определение 2. Значение переменной σ , при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ , т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике; в то же время это точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Но тогда для σ_0 имеет место неравенство

$$v_1(\sigma_0, t_0) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} > 0.$$

Более того, если σ - произвольное критическое значение, то, согласно определению, $v_1(\sigma, t_0) \in \left(\frac{t_0}{1+t_0^2}, \frac{1}{t_0} \right)$; в частности, $v_1(\sigma, t_0) > 0$.

Обозначим

$$\Psi(\sigma, x) = \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x).$$

Тогда имеет место равенство

$$v_1(\sigma, t_0) = \int_1^{\infty} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Лемма 2. *Графики функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$ могут пересекаться только в одной точке (σ_0, t_0) .*

Доказательство. Пусть σ' - некоторое положительное число такое, что $\sigma + \sigma'$ - критическое значение.

Очевидно, что

$$\Psi(\sigma + \sigma', x) = \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x).$$

Тогда

$$v_1(\sigma + \sigma', t_0) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Так как σ и $\sigma + \sigma'$ - критические значения, то $v_1(\sigma, t_0) > 0$ и $v_1(\sigma + \sigma', t_0) > 0$, поэтому для некоторого достаточно большого X_0 и любого $X > X_0$ имеют место неравенства

$$\int_1^X \Psi(\sigma, x) dx > 0 \text{ и } \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx > 0.$$

Обозначим $\mathfrak{R}[a, b]$ множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$. Нам будет полезна [2, с. 352]

Теорема (вторая теорема о среднем для интеграла). *Если $f(x), g(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$ и $g(x)$ - монотонная на $[a, b]$ функция, то найдётся точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx.$$

Так как функция $g(x) = \frac{1}{x^{\sigma'}}$ монотонно убывает по x , то по второй теореме о среднем для интеграла найдётся точка $\xi = \xi(X) \in [1, X]$ такая, что

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx + \frac{1}{X^{\sigma'}} \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx. \quad (5)$$

Если $\int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx \geq 0$, то, поскольку $\frac{1}{X^{\sigma'}} < 1$, получаем

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx + \frac{1}{X^{\sigma'}} \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx \leq \int_1^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^X \Psi(\sigma, x) dx, \quad (6)$$

то есть в этом случае лемма 2 верна.

Перейдём к случаю $\int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx < 0$.

Будем применять моделирование гипердействительных чисел на множестве последовательностей действительных чисел¹. Гипердействительное число, моделируемое последовательностью $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots]$, для краткости обозначаем $[a_n]$. Действительное число a отождествляется с последовательностью $[a, a, \dots, a, \dots] = [a]$.

Согласно принципу переноса нестандартного (инфинитезимального) анализа имеет место инфинитезимальный аналог вышеприведённой второй теоремы о среднем для интеграла.

Пусть $\sigma' = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right] = \left[\frac{1}{n}\right]$ – бесконечно малое положительное число. Гипердействительное число $\xi \in [1, X]$ соответствует числам σ' и действительному числу $[X]$.

Если a – произвольное положительное действительное число, тогда $a^{\sigma'} = [a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \dots, \sqrt[n]{a}, \dots] \approx [1, 1, \dots, 1, \dots] = [1]$.

Если $[a_n]$ – произвольное гипердействительное число, то $[a_n]^{\sigma'} = [a_n^{\sigma'}] \approx [1]$; в частности, $[X^{\sigma'}] \approx [1]$.

Итак, $\frac{1}{X^{\sigma'}} = \left[\frac{1}{X^{\frac{1}{n}}}\right] \approx [1]$.

Обозначим

$$\bar{v}_1(\sigma, t_0) = \int_1^X \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx.$$

¹См. [3], §9 (построения проводятся с использованием нетривиального ультрафильтра на множестве натуральных чисел в качестве индексов в последовательностях действительных чисел. См. также [4]).

Вычислим производную

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{v}_1}{d\sigma} &= \frac{\frac{1}{X^{\sigma'}} - [1]}{\sigma'} \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx = \frac{\left[\frac{1}{X^{\frac{1}{n}}} - 1 \right]}{\left[\frac{1}{n} \right]} \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx = \\ &= \left[\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{n}}} - 1 \right) n \right] \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx = -\ln(X) \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx.\end{aligned}$$

Значит, вдоль графика функции $\bar{v}_1$ производная постоянна, поэтому этот график является прямой линией². $\square$

В случае $\int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx < 0$ производная положительна, поэтому прямая $\bar{v}_1$ идёт вверх (при этом, согласно условию, она проходит через точку (σ_0, w_0)).

Согласно лемме 1 график функции v_2 возрастает и, более того, выпукла строго вверх (вторая производная отрицательна). Поэтому прямая $\bar{v}_1$ либо касается кривой v_2 в единственной точке (σ_0, w_0) , либо в двух точках (в точке $A(\sigma_0, w_0)$ и ещё в какой-то точке $B(\sigma_1, w_1)$).

Допустим, для определённости, что $\sigma_0 < \frac{1}{2}$.

Как известно, при фиксированном t_0 точки $s_0 = \sigma_0 + it_0$ и $s_1 = 1 - \sigma_0 + it_0$ являются нулями дзета-функции, график v_2 симметричен относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, поэтому $\sigma_1 = 1 - \sigma_0$, значит, точка B лежит на кривой v_2 выше точки A .

По этим двум точкам определим тангенс угла $\bar{\varphi}$ наклона прямой $\bar{v}_1$:

$$\operatorname{tg}(\bar{\varphi}) = \frac{v_2(\sigma_1, t_0) - v_2(\sigma_0, t_0)}{\sigma_1 - \sigma_0} = \frac{\frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} - \frac{t_0}{(1 - \sigma_0)^2 + t_0^2}}{1 - 2\sigma_0}.$$

$$\text{В то же время } \operatorname{tg}(\bar{\varphi}) = -\ln(X) \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx.$$

Правые части этих равенств являются константами и должны быть равны друг другу.

Получаем равенство

$$-\ln(X) \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx = \frac{\frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} - \frac{t_0}{(1 - \sigma_0)^2 + t_0^2}}{1 - 2\sigma_0}. \quad (7)$$

²Случай $\int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx \geq 0$ соответствует невозрастанию функции $\bar{v}_1$, что ещё раз подтверждает неравенство 6.

Пусть теперь X — бесконечно большое число; пусть оно моделируется последовательностью положительных чисел $[a_n]$. Тогда и $\ln(X)$ будет бесконечно большим числом. Но тогда $\int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx$ не может быть конечным неинфинитезимальным числом, иначе левая часть равенства 7 будет бесконечно большим числом, а правая часть является действительным ненулевым числом.

Следовательно, интеграл $\int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx \approx 0$; пусть $\varepsilon = [\varepsilon_n]$ — его модель из действительных отрицательных чисел.

$$-\ln(X) \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx = -\ln[a_n] \cdot \varepsilon = [-\varepsilon \cdot \ln(a_n)] = [\ln(a_n^{-\varepsilon})] \approx [\ln(1)] = [0].$$

Но тогда левая часть равенства 7 не может равняться его правой части.

Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Доказательство гипотезы Римана

Теорема. Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$, то $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $t_0 > 0$. Согласно леммам 1 и 2, графики v_1 и v_2 пересекаются в единственной точке $v_1(\sigma_0, t_0) = v_2(\sigma_0, t_0)$.

Как известно, в комплексной плоскости, если точка $s_0 = \sigma_0 + it_0$ — нетривиальный нуль дзета-функции, то точка $1 - \sigma_0 + it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, тоже является нетривиальным нулём дзета-функции. Поэтому число $1 - \sigma_0$ является решением уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$.

Обозначим $\sigma_1 = 1 - \sigma_0$, $w_1 = v_1(\sigma_1, t_0) = v_2(\sigma_1, t_0)$. Следовательно, если при этом $\sigma_0 \neq \frac{1}{2}$, то точка (σ_1, w_1) тоже является точкой пересечения графиков функций $w = v_1(\sigma, t_0)$ и $w = v_2(\sigma, t_0)$, отличной от точки (σ_0, w_0) . Но выше было установлено, что эти графики могут пересекаться только в одной точке. Получается противоречие, следовательно, $\sigma_0 = \frac{1}{2}$. $\square$

Гипотеза Римана доказана.

Список литературы

- [1] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. Изд-во Московского университета, 1984.
- [2] Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997.
- [3] Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
- [4] Goldblatt R. Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis. New York etc.: Springer, 1998.